图的边函数控制数

刘林忠 张忠辅

(兰州铁道学院运输系) (兰州铁道学院应用数学研究所)

摘　要　本文定义了图的边控制函数及边函数控制数，并得到了3-正则图和4-正则图及完全图的边函数控制数⒆

关键词　边控制函数；边函数控制数

分类号　O 157.5

0 引　言

交通岗的设置数目等实际问题涉及到图的控制数[1]⒀计算机科学还遇到如下问题的模型⒀

定义 1　对图 $G(V,E)$，映射

$$f:E \longrightarrow \{-1,1\}$$

使得对 $\forall e \in E$，e 的邻边及 e 的集合 $N[e]$ 满足：

$$\sum_{e'\in N[e]} f(e') \geqslant 1⒀$$

则称使

$$r'_s(G) = \min\{\sum_{e\in E} f(e) | f \text{ 为 } G \text{ 的(理想)边控制函数}\}$$

的 f 为 G 的(理想)边控制函数，$r'_s(G)$ 为 G 的边函数控制数⒀

类似的可定义 G 的(点)控制函数、(点)函数控制数[2]、(点边)全控制函数、全函数控制数⒀

显然，对任意图 G，$r'_s(G)$ 是存在的，且有

$$r'_s(G) \leqslant |E(G)|.$$

上式的不等式是平凡的⒀ $'_s(G)$ 是可以取负值的⒀例如 K_5，将每一条边的 f 值定义为 1，对每一个顶点 u，再增加 $d(u)-1$ 个顶点与之相连，将这些边的 f 值全定义为 -1，通过计算邓知 $r'_s(G)=-5$⒀

对路、圈、扇、轮及完全二部图等的边函数控制数已有结果，下面仅讨论正则图和完全图的边函数控制数⒀

文中用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，用 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，其它术语及符

收稿日期：1997-07-17　　刘林忠，男，1963 年生，讲师⒀

号见文献[1]⒀

1 主要结果

下面仅讨论 3 - 正则图和 4 - 正则图⒀

引理 1 (Petersen, 1891)[3] 对没有割边的 3 - 正则连通图 G, $E(G)$ 可分解为一个 1 - 因子(完美匹配) 和若干个点不交的圈的并⒀

显然, 3 - 正则图的顶点数为偶数⒀

定理 1 对 $|V(G)| = 2n$ 的无割边的 3 - 正则图 G 有 $r'_s(G) = n$⒀

证明: 由引理 1, 可令 $G = M \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$, 其中 M 为引理中 G 的 1 - 因子, $C_i(i = 1, 2, \cdots k)$ 为引理 1 中的 G 的圈⒀

对 3 - 正则图, 其任一边控制函数都有这样的特点: 任一顶点相关联的 3 条边中最多只能有一条为 -1, 因此可如下定义 G 的边控制函数 f:

$$f(e) = \begin{cases} -1, & \text{如果 } e \in M \\ 1, & \text{如果 } e \in C_i(i = 1, 2\cdots, k) \end{cases}$$

通过计算

$$r'_s(G) = |E(G)| - 2|M| = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot 3 - 2n = 3n - 2n = n$$

因此结论成立⒀

引理 2 (Tutte, 1947)[4] 设 G 是 p 阶 k - 正则, $(k-1)$ - 边连通图$(p = 2n \geqslant 2, k \geqslant 21)$, 则含有 1 - 因子(完美匹配)⒀

定理 2 对 $|V(G)| = 2n$ 的 3 - 边连通的 4 - 正则 $r'_s(G) = 2n$⒀

证明 由引理 2, 设 M 为引理 2 中 G 的 1 - 因子⒀

对 4- 正则图, 其任一边控制函数都有这样的特点: 任一顶点相关联的 4 条边中最多只能有一条为 -1, 因此可如下定义 G 的边控制函数 f:

$$f(e) = \begin{cases} -1, & \text{如果 } e \in M \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

通过计算即知:

$$r'_s(G) = |E(G)| - 2|M| = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot 4 - 2n = 4n - 2n = 2n$$

因此结论成立⒀

定理 3 对完全图 $K_p(p \geqslant 4)$, 有

$$r'_s(K_p) = \begin{cases} \frac{p}{2}, & \text{当 } p \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \\ \frac{p-1}{2}, & \text{当 } p \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \end{cases}$$

证明 设 $V(K_p) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$⒀

情况 1 若 $p \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$⒀

情况 1.1 若 $p \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. 令

$$f(v_iv_j)=\begin{cases}1, & j-i=1\ (\mathrm{mod}\ 2),\ i,j=1,2,\cdots,p\\ -1, & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $j-i$ 为模 p 运算⒀则 f 为 K_p 的理想控制函数,通过计算可知 $f(E)=\frac{p}{2}$⒀因此结论成立⒀

情况 2　若 $p\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$⒀以下关于下标的运算均为 p 运算⒀

情况 2.1　若 $p-1\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$. 与任意 2 个点相关联的 -1 边的总数量最多不能多于 $p-1$, 否则可验证 f 不为控制函数⒀按下面的方法定义 f⒀

把 $V(G)$ 分为两部分

$$V_1=\{v_{1+i}\mid i=0,1,2,\cdots,\tfrac{p-1}{4}\}\cup\{v_{1-i}\mid i=1,2,\cdots,\tfrac{p-1}{4}\},\ \text{则}\ |V_1|=\frac{p+1}{2};$$

$$V_2=V/V_1,\ \text{则}\ |V_2|=(p-1)/2.$$

$\forall u,v\in V_1, f(uv)=-1$; $\forall u,v\in V_2, f(uv)=-1$; $\forall u\in V_1, v\in V_2, f(uv)=1$ 则可验证 f 为 G 的理想边控制函数,且 -1 边的总数为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}+\frac{p-1}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{2}-1\right)\right]=\frac{(p-1)^2}{4},$$

通过计算可得

$$f(E)=p(p-1)/2-(p-1)^2/2=(p-1)/2⒀$$

若要在某两点间增加一条 -1 边,则必须相应的减少与该边相关联的另外一条 -1 边,否则必须有 1 边 e,使得 $f(N[e])=0$,矛盾,即 -1 边不能再增加⒀因此结论成立⒀

情况 2.2　若 $p-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$⒀与情况 2.1 类似可证结论成立⒀

综合以上即知结论成立⒀

参 考 文 献

1　Gray Chartrand, Linda Lesniak-Foster. Graphs and Digraphs, ind edition Wadsworth Brooks/Cole, Monterey, CA(1980).

2　J A Bondy, U S R Murty. Graph Theory with applications, The macmillan Press Ltd. 1976

3　H P Yap, Total Colorings of Graphs, Lecture Notes In Mathematics, 1623, 26～27

4　丰田,马仲蕃⒆图与网络流理论⒆北京:科学出版社,1987,74～75

On The Edge Function Domination Number of Graphs

Liu Linzhong

(Management Engineering Dept. Lanzhou Railway Institute)

Zhang Zhongfu

(Institute of Applied Mathemaics, Lanzhou Railway Institute)

Abstract　We define the edge domination function and the edge function domination number of graphs and obtain some results of edge function domination number of some special graphs.

Key words　edge domination function; edge function domination number