第15卷第2期 华东交通大学学报 Vol.15 No.2
1998年6月 Journal of East China Jiaotong University Jun. 1998

关于图的符号控制函数的若干结果*

于崇智

(成人教育学院)

摘　要　定义在图 $G=(V,E)$ 顶点集 V 上的一个二值函数 $f:V\longrightarrow\{+1,-1\}$,若 $\forall v\in V$,$f(N[v])\geqslant 1$,称 f 是 G 的一个符号控制函数。图 G 的符号控制函数 f 的权重 $f(V)=\sum\limits_{v\in V}f(v)$ 的最小值定义为图 G 的符号控制数,记为 $\gamma_s(G)$。本文给出了图的最小控制函数的几个性质定理。

关键词　图;符号控制函数;符号控制数

分类号　O 157.5

设图 $G=(V,E)$,v 是 V 中的一个顶点。v 的开邻域定义为与 v 的邻接的顶点集,即 $N(v)=\{u\mid uv\in E\}$。v 的闭邻域是 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$。对一个顶点子集 S,定义 S 的开邻域为 S 的所有顶点 v 的开邻域的并集,即

$$N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v),$$

S 的闭邻域 $N[S]=N(S)\cup S$。若 $N[S]=V$,则顶点集 S 称为 G 的一个控制集。图 G 的控制集的最小基数称为图的控制数,记为 $\gamma(G)$。

在图 G 的顶点集 V 上定义任何实值函数 $g:V\longrightarrow R$,且设 $S\subseteq V$,记

$$g(S)=\sum_{v\in S}g(v)。$$

图 G 的一个符号控制函数(signed dominating function)是 V 上的一个二值函数 $f:V\longrightarrow\{+1,-1\}$,使得对任何 $v\in V$,$f(N[v])\geqslant 1$。图 G 的符号控制数定义为

$$\gamma_s(G)=\min\{f(V)\mid f\text{ 是 }G\text{ 的一个符号控制函数}\}。$$

使 $f(V)=\gamma_s(G)$ 的函数 f 称为实现函数。对任意图 G,G 的实现函数显然存在。

本文中没有定义的术语、符号见文献[1]。

定理1　图 G 的一个实现函数 f,对任何 $v\in V$,若 $f(v)=1$,则必存在一点 $u\in N[v]$,使 $f(N[u])\in\{1,2\}$。

证明　用反证法。设存在一点 $v\in V$,且 $f(v)=1$,但对任何 $u\in N[v]$,使

$$f(N[u])\notin\{1,2\}。$$

因 f 是 G 的一个实现函数,必为 G 的符号控制函数。从定义可知,$\forall v\in V$,$f(N[v])\geqslant 1$。因为

收稿日期 1997-05-29　　于崇智,男,1946 年生,副教授。

* 江西省自然科学基金资助项目

$u \in N[v] \subseteq V$，故 $f(N[u]) \geqslant 1$. 由反证法假设，$f(N[u]) \notin \{1, 2\}$，所以 $f(N[u]) \geqslant 3$.

在 G 的顶点集 V 上重新定义一个函数 $g: V \longrightarrow \{+1, -1\}$，取

$$\begin{cases} g(v) = -1, \\ g(\omega) = f(\omega), \forall\, \omega \neq v. \end{cases}$$

现来证明 g 是 G 的一个符号控制函数. 对任何 $\omega \notin N[v]$，显然 $g(N[\omega]) = f(N[\omega]) \geqslant 1$. 对所有的 $u \in N[v]$，有

$$g(N[u]) = \sum_{x \in N[u]} g(x) = g(v) + \sum_{x \in N[u]-\{v\}} g(x) = -1 + \sum_{x \in N[u]-\{v\}} f(x) =$$
$$-1 - f(v) + \sum_{x \in N[u]} f(x) = -2 + f(N[u]) \geqslant 1.$$

$\forall v \in V, g(N[v]) \geqslant 1$，故 g 是 G 的一个符号控制函数. 从 g 的定义可知，$g(V) < f(V)$，这和 f 是 G 的实现函数相矛盾，故证.

从符号控制函数定义可知 G 的任何一个顶点赋值为 1 的函数必是 G 的一个符号控制函数. 由此得

定理 2　$\forall G, \gamma_s(G) \leqslant n$.

这里 n 是 G 的顶点个数.

这个符号控制数的上界不可改进. 例如星图 $K_{1,m}$，有 $\gamma_s(K_{1,m}) = m + 1 = |V(K_{1,m})|$.

引理 3　设 f 是图 G 的任一个符号控制函数，记 P 和 M 分别是在 f 下赋值为 1、-1 的顶点集合，则 $P \neq \varnothing$.

证明　显然.

定理 4　若 f 为图 G 的一个实现函数，P 和 M 分别是 f 下赋值为 1、-1 的顶点集合，则

$$\sum_{u \in P} d(u) \geqslant \sum_{u \in M} d(u),$$

其中 $d(u)$ 是 G 中顶点 u 的度数.

证明　考虑和式 $\sum\sum f(u)$，其中外层和是对所有 $v \in V$ 而取的，内层和是对所有的 $u \in N[v]$ 而取的. $\forall u \in V$，这个和计算值 $f(u)$ 共 $d(u) + 1$ 次，故

$$\sum\sum f(u) = \sum_{u \in V} f(u)[d(u) + 1].$$

而另一方面，

$$\sum\sum f(u) = \sum_{v \in V} f(N[v]) \geqslant \sum_{v \in V} 1 = n.$$

这里 n 为 G 的顶点数. 从 P、M 的假设可知，$P \cup M = V, P \cap M = \varnothing$，所以

$$\sum_{u \in V} f(u)[d(u) + 1] = \sum_{u \in P} f(u)[d(u) + 1] + \sum_{u \in M} f(u)[d(u) + 1] =$$
$$\sum_{u \in P}[d(u) + 1] - \sum_{u \in M}[d(u) + 1] = \sum_{u \in P} d(u) + |P| - \sum_{u \in M} d(u) - |M|.$$

因 $\gamma_s(G) = |P| - |M|$，故有

$$\sum_{u \in P} d(u) - \sum_{u \in M} d(u) \geqslant n - \gamma_s(G).$$

由定理 2，$\gamma_s(G) \leqslant n$，故

$$\sum_{u \in P} d(u) \geqslant \sum_{u \in M} d(u).$$

推论 5　若 f 是 G 的一个实现函数，则赋值为 1 的全体顶点的度数和不小于图 G 的边数.

证明　记 f 下赋值为 1、-1 的顶点集分别为 P、M。由定理 4 知

$$\sum_{u\in P} d(u) \geqslant \sum_{u\in M} d(u) \qquad (1)$$

根据顶点度数和定理，$\sum_{u\in V} d(u) = 2|E|$。因为 $P\cup M = V$，故

$$\sum_{u\in P} d(u) + \sum_{u\in M} d(u) = 2|E| \qquad (2)$$

(1)、(2) 式相加得

$$\sum_{u\in P} d(u) \geqslant |E|$$

定理 6　若图 $G = G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_m$，其中 $G_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 G 的连通分支，则

$$\gamma_s(G) = \sum_{i=1}^{m}\gamma_s(G_i)$$

证明　设 f 是 G 的一个实现函数，由定义，$\forall v\in V, f(N[v])\geqslant 1$。不妨设 $v\in V(G_i)$，因 $N[v]\subseteq V(G_i)$，所以对每个连通分支 G_i 来说，f 仍是一个实现函数。若不然，则 f 对 G 而言也不是一个实现函数。

按符号控制数的定义，$\gamma_s(G_i) = \sum_{v\in V(G_i)} f(v)$，而

$$\gamma_s(G) = \sum_{v\in V(G)} f(v) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v\in V(G_i)} f(v) = \sum_{i=1}^{m}\gamma_s(G_i)$$

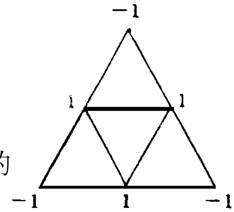

图 1　Hajós 图

利用定理 6 的结论，对图的符号控制数的讨论可以限制在对连通图的情况下进行即可。

对一般的图而言，$\gamma_s(G)$ 和 $\gamma(G)$ 是不可比较的。例如对星图 $K_{1,m}$，$\gamma_s(K_{1,m}) = m+1$，而 $\gamma(K_{1,m}) = 1$，则 $\gamma_s(K_{1,m}) > \gamma(K_{1,m})$。另一方面，对图 1 中的 Hajós 图 H，显然 $\gamma(H) = 2$，但按图 1 中的顶点赋值函数，$\gamma_s(H) = 0$，故

$$\gamma_s(H) < \gamma(H)$$

参 考 文 献

1　邦迪 J A，默蒂 U S R. 图论及其应用. 吴望名等译. 北京：科学出版社，1984，284

2　I Broere，J H Hattingh，M A Henning，A A McRae. Majority domination in graphs. Discrete Mathematics，1995，138：125～135

3　于崇智，徐保根. 图的符号控制数. 华东交通大学学报. 1997，14(4)：54～58

Some Results about Signed Dominating Funcition of Graphs

Yu Chongzhi

(Adult Education College)

Abstract A two-valued function f defined on the vertices of a graph $G=(V,E)$, $f:V\longrightarrow\{+1,-1\}$, is a signed dominating function, such that for every $v\in V$, $f(N[v])\geqslant 1$. the weight of a signed dominating function is $f(V)=\sum_{v\in V}f(v)$. The signed domination number of a graph G, denoted $\gamma_s(G)$, equals the minimum weight of a signed dominating function. We give some properties of a minimum signed dominating function of G.

Key words graph; signed dominating function; signed domination number

(上接第49页)

参 考 文 献

1 B B Dasgupta. The magnetic field on an infinite solenoid. Am J Phys, 1984, 52: 258
2 Victor Namias. The magnetic field on a solenoid of arbitrary section. Am J Phys. 1985, 53(6)

A Method of Bearing on Magnetic Field on a Solenoid of Arbitrary Section

Huang Shiyi

(Basie Courses Department)

Abstract Using the Biot-Savart law calculate the magnetic field on a cylindrical solenoid of arbitrary area.

Key words solenoid; current element; symmetry