

法向均布载荷作用下椭圆平片裂纹超奇异积分方程的封闭解

陈梦成

(机械工程系)

摘 要 提出三维均质体中法向均布载荷作用下的椭圆平片裂纹区域 S 内超奇异积分 $\int_+ r^{-3} \Delta u dS$ 的封闭解法, 解法应用了裂纹表面位移间断具有平方根的特性^[13]

关键词 均质体; 椭圆平片裂纹; 超奇异积分方程; 均布载荷; 封闭解

分类号 O 346.1

0 引 言

三维无限大均质弹性体中任一受法向内压作用平片裂纹的求解问题可以化为求解如下超奇异积分方程^[1]

$$\int_+ \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{r^3} dx_1 dx_2 = \frac{8\pi(1-\nu)}{E} p(\xi, \xi), \quad \xi, \xi \in S. \quad (1)$$

式中: $\int_+$ 为 Hadamard 有限部积分^[2]; S 为平片裂纹区域; E 为 Young 模量; ν 是 Poisson 比; r 定义为 $r^2 = |x - \xi| = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$; $p(\xi, \xi)$ 为裂纹表面上的法向内压力分布; $\Delta u(x_1, x_2)$ 是待确定的裂纹面间法向位移间断, 沿着平片裂纹的周界有 $\Delta u(\xi, \xi) = 0, \xi, \xi \in \partial S$ ^[13]

式(1)看起来简单, 但要获得它的解析解, 一般来讲, 绝非易事^[13]。如果平片裂纹形状特殊, 且其面上所受内压力载荷为均布, 那么我们能够获得式(1)中未知位移间断解析解^[13]。1982年 Ioakimidis^[3]应用 Sneddon^[4]获得的已知法向均布载荷作用下圆片裂纹移间断解析解代入式(1)来证明等式两边相等, 显然这不能算真正意义上超奇异积分方程式(1)的解析解法^[13]。笔者和汤任基^[5]曾对受法向均布载荷作用的圆片裂纹问题进行过讨论, 并采取将超奇异积分方程式(1)变换为 Abel 积分形式的方法, 精确地得到了圆片裂纹问题的位移间断解析解^[13]。以上所讨论的都是圆片裂纹问题, 而对于椭圆平片裂纹问题, 如何对超奇异积分方程式(1)进行求解, 据笔者所知, 除了数值求解方法之外^[1], 尚未发现有人获得它的精确解析解法^[13]。

笔者利用平片裂纹在均布载荷作用下位移具有平方根的特性, 讨论获得椭圆平片裂纹超奇异积分方程式(1)解析解的精确解法^[13]。

1 超奇异积分方程求解

笔者在文献[6]曾经证明了三维均质弹性体中椭圆平片裂纹在其表面受法向均布载荷的作用下,裂纹表面法向位移间断可以表示成如下形式

$$\Delta u(x_1, x_2) = A \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}. \quad (2)$$

式中: A 是一个待定的未知常数(注意, A 只有在裂纹面受均布载荷作用时才为常数; a 为椭圆平片裂纹的长半径; b 为椭圆平片裂纹的短半径).

在均布载荷作用下,超奇异积分方程式(1)改写为

$$\int_{+} \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{r^3} dx_1 dx_2 = \frac{8\pi(1-\nu)}{E} P_0. \quad (3)$$

将式(2)代入式(3),得

$$A \int_{+} \frac{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}{r^3} dx_1 dx_2 = \frac{8\pi(1-\nu)}{E} P_0. \quad (4)$$

要得到式(4)中未知常数 A 的值,关键在于计算积分

$$I = \int_{+} \frac{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}{r^3} dx_1 dx_2 \quad (5a)$$

的值^[3]为此,先来研究以下积分

$$M = \int_{+} \frac{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}{r} dx_1 dx_2 \quad (5b)$$

为了方便式(5b)的分析,我们引入椭球坐标系 (λ, μ, ν) , 它和直角坐标系任意一点 (x_1, x_2, x_3) 的变换关系^[7]为

$$\left. \begin{aligned} a^2(a^2 - b^2)x_1^2 &= (a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu), \\ b^2(a^2 - b^2)x_2^2 &= (b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu), \\ a^2b^2x_3^2 &= \lambda\mu. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $-a^2 \leq \nu \leq -b^2 \leq \mu \leq 0 \leq \lambda < \infty$, 当 $x_3 = 0, \lambda = 0$ 时,是指点 (x_1, x_2) 在椭圆内; $\mu = 0$ 是指在椭圆外^[3]

为了评价积分式(5),我们可以利用下面 Eshelby^[8]椭圆积分

$$\int_{+} \frac{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}{r} dx_1 dx_2 = \frac{\pi b}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{\xi}{a^2 + s} - \frac{\xi}{b^2 + s} \right\} \frac{ds}{Q(s)}, \quad (7)$$

其中 $Q(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)s$

若令 $s = t^2$, 则可得到式(7)的积分,即^[9]

$$\int_{+} \frac{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2}{r} dx_1 dx_2 = \pi \left[K(k) - \frac{\xi}{a^2} \frac{K(k) - E(k)}{k^2} - \frac{\xi}{a^2} \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{(1 - k^2)k^2} \right] \quad (8)$$

式中, $k^2 = 1 - (b/a)^2$; $K(k), E(k)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分^[13]

秦太验^[10]曾经用有限部积分的概念证明了如下积分等式

$$\nabla^2 \int_{\mathcal{S}} \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{r} dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{S}} \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{r^3} dx_1 dx_2, \quad (9)$$

其中: ∇ 为平面 Laplace 算子, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$.

因此, 对式(8)两边施以平面 Laplace 算子 ∇^2 , 拉普拉斯算子得到式(5)的积分值, 注意到式(4), 则

$$A = 4(1 - \nu) b p_0 / [E(k) E]. \quad (10)$$

将式(10)代入式(2), 有

$$\Delta u(x_1, x_2) = \{4(1 - \nu) b p_0 / [E(k) E]\} \sqrt{1 - (x_1/a)^2 - (x_2/b)^2}. \quad (11)$$

这就是椭圆平片裂纹受法向均布载荷作用时超奇异积分方程式(1)的未知位移间断解, 它与 Sneddon^[3]使用 Fourier 变换方法得到的结果完全一致^[13]若 $a=b$, 则 $k=0$, $E(k) = \pi/2$, 式(11)应相应退化为

$$\Delta u(x_1, x_2) = [8(1 - \nu) p_0 / (\pi E)] \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (12)$$

式(12)即为法向均布载荷作用下圆片裂纹表面位移间断的结果^[4,5]

2 结束语

本文利用平片裂纹表面位移平方根的特性讨论了椭圆平片裂纹受法向均布载荷作用时超奇异积分方程式(1)的解析解法

参 考 文 献

- 1 汤任基, 秦太验. 三维断裂力学的超奇异积分方程方法. 力学学报, 1993, 25: 665~675
- 2 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New York: Dover Pub. Inc., Mineola, 1952
- 3 Ioakimidis N I Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. Acta Mech., 1982, 45: 31~47
- 4 Sneddon N I The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc. London, 1946, 187: 229~260
- 5 陈梦成, 汤任基. 无限均质弹性体中圆片裂纹受均布载荷时的超奇异积分方程封闭解. 上海力学, 1997, 18(3): 248~251
- 6 陈梦成. 两相材料界面附近(含界面)三维断裂力学问题的超奇异积分方程方法: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 1997
- 7 Whittaker E T, Watson G N. Modern analysis. Cambridge University Press, 1927
- 8 Eshelby J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. Proc. Roy. Soc. London, 1946, 252: 561~569
- 9 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products. New York: Academic Press Inc., 1979
- 10 秦太验. 三维断裂力学的有限部积分-边界元法研究: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 1993

参 考 文 献

- 1 黄泽恩. 地下连续墙泥浆槽的稳定性分析. 地下工程, 1986, 20: 10~17
- 2 Huder J¹⁹ Stability of Bentonite Slurry Trenches with some Experiences in Swiss Practice, Proc of 5th Eur Conf Soil Mech Found Eng Madrid, 1972, 1: 70~80

The Stability of Slurry French Diaphragm Wall

Ji Chongping Yu Shaofeng

(Civil Engineering Department, Shanghai Tiedao University)

Abstract It can be seen from the practice that the failure of slurry trench diaphragm wall occurred often at the guide wall. Based on the assumption that the failure of diaphragm wall is of the pattern of general sliding with cylindrical surface. The analytical results can be used to interpret the actual failure slurry trench diaphragm wall.

Key words underground wall; slurry trench; stability

(上接第12页)

Plastic Energy Dissipation of Secondary Structure and Shock Absorption Analysis of Primary Structure

Xu Haiyan Qin Ming

Ni Chunfu

(Civil Engineering Department)

(Construction Office)

Abstract The response of secondary structure on the top greater than that of primary one in earthquake will consume some energy of the primary structure. This will cut down the vibration of primary system. In this paper, the energy dissipation of secondary system on plastic has been analysed and its effect of shock absorption on primary structure has been discussed.

Key words secondary structure; plastic energy dissipation