循环矩阵的实用判据

李 久 平

(山东工业大学数理系)

摘　要　给出了循环矩阵的两个实用判据,一个是充要条件,另一个是充分条件19.

关键词　循环矩阵;循环向量;最小多项式

分类号　O 151.21

0 引　言

在线性系统中,循环矩阵是一种常用的矩阵,但是目前还没有很有效的判别方法⒀本文给出两个实用判据,仅进行四则运算,就可判定循环矩阵⒀

1 判定定理

记 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的全体 n 阶方阵,$\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为实数域上的全体 n 阶方阵,它们分别构成复数域 $\mathbf{C}$ 和实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n^2 维向量空间,记 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭阵⒀

定义 1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}(\boldsymbol{R}^{n\times n})$,如果矩阵 A 的最小多项式等于特征多项式,则称 A 为循环矩阵⒀

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}(\boldsymbol{R}^{n\times n})$,则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ ⒀

定理 1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}(\boldsymbol{R}^{n\times n})$ 则 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵的充要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}) \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}] & \mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}] & \cdots & \mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}] \end{bmatrix} \tag{1}$$

是满秩的⒀

证明　由循环矩阵的定义知⒀

$\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式等于特征多项式

$\Leftrightarrow \boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 是向量空间 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上的 n 个线性无关向量⒀

将 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 沿列方向拉长成 n^2 维列向量,得 $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$,将其排成 $n^2\times n$ 矩

收稿日期:1997-10-04　　李久平,男,1965年生,讲师⒀

阵 $\boldsymbol{T}$⒀

$$\boldsymbol{T}=[\underset{\sim}{\boldsymbol{I}},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{2},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}]. \qquad (2)$$

则　$\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵$\Leftrightarrow$($\boldsymbol{T}$) 的列向量线性无关，$\Leftrightarrow$rank($\boldsymbol{T}$) $=n$，$\Leftrightarrow$rank($\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}$) $=n$⒀

其中　$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}$ 为 n 阶方阵

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}(\underset{\sim}{\boldsymbol{I}})^{\mathrm{H}}\\(\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\\(\boldsymbol{A}^{2})^{\mathrm{H}}\\\vdots\\(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}[\underset{\sim}{\boldsymbol{I}},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{2},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}]=$$

$$\begin{bmatrix}(\underset{\sim}{\boldsymbol{I}})^{\mathrm{H}}\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} & (\underset{\sim}{\boldsymbol{I}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} & \cdots & (\underset{\sim}{\boldsymbol{I}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}\\(\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} & (\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} & \cdots & (\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} & (\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} & \cdots & (\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1})\\\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1})\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}] & \mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}] & \cdots & \mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{n-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{n-1}]\end{bmatrix}⒀$$

故结论成立⒀

定义 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维向量空间 V 上的一个线性变换，若存在向量 燧$\in V$，使得 燧$\boldsymbol{A}$燧 $\cdots$，$\boldsymbol{A}^{n-1}$燧线性无关，则称 燧为 $\boldsymbol{A}$ 的一个循环向量⒀

引理 2[3]　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维向量空间 V 上的一个线性变换，$\boldsymbol{A}$ 有一个循环向量的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式等于特征多项式⒀

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个循环向量⒀

定理 2　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}(\boldsymbol{R}^{n\times n})$，rank($\boldsymbol{A}^{n}$) $<$rank($\boldsymbol{A}^{n-1}$)，则 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵⒀

证明　由于 rank($\boldsymbol{A}^{n}$) $<$rank($\boldsymbol{A}^{n-1}$)，　故 $n-$rank($\boldsymbol{A}^{n-1}$) $<n-$rank($\boldsymbol{A}^{n}$)，

即 $\boldsymbol{A}^{n-1}$的核空间的维数小于 $\boldsymbol{A}^{n}$的核空间的维数⒀所以必存在向量 燧$\in\boldsymbol{C}^{n}(\boldsymbol{R}^{n})$，使得 $\boldsymbol{A}^{n-1}$燧 $\neq0$，而 $\boldsymbol{A}^{n}$燧$=0$⒀

下面证明 燧就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个循环向量，即 燧$\boldsymbol{A}$燧 $\cdots$，$\boldsymbol{A}^{n-1}$燧线性无关⒀

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{C}(\boldsymbol{R})$，且满足 x_1燧$+x_2\boldsymbol{A}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$=0$，

则 $\boldsymbol{A}^{n-1}(x_1$燧$+x_2\boldsymbol{A}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$)=x_1\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$+x_2\boldsymbol{A}^{n}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{2n-2}$燧$=x_1\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$=0$⒀

所以　$x_1=0$，　$x_2\boldsymbol{A}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$=0$，

从而 $\boldsymbol{A}^{n-2}(x_2\boldsymbol{A}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$)=0$，即　$x_2\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$=0$，

所以　$x_2=0$，　$x_3\boldsymbol{A}^{2}$燧$+\cdots+x_n\boldsymbol{A}^{n-1}$燧$=0$⒀

类似地递推下去，可得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

因此 燧$\boldsymbol{A}$燧$\cdots$,$\boldsymbol{A}^{n-1}$燧线性无关,即 燧为 $\boldsymbol{A}$ 的一个循环向量⒀
所以 $\boldsymbol{A}$ 是循环矩阵⒀

2　结束语

定理 1 给出了判定循环矩阵的充要条件,根据这一条件,要判别一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否循环矩阵,只要对 $\boldsymbol{A}$ 的元素进行一些四则运算,就可得到矩阵式(1) ,即 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}$,再对矩阵式(1) 进行一些四则运算,就可得到它的秩,因而易于实现⒀在实际运用时,只要计算矩阵 $\boldsymbol{T}$ 即式(2) 的秩即可⒀

定理 2 所给仍方法,也是只要对 $\boldsymbol{A}$ 的元素进行一些四则运算,就可实现对 $\boldsymbol{A}$ 的判别⒀

这两种方法都要计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂,因而计算量很大,这是它们的一个缺点⒀

参　考　文　献

1　蒋正新等⒚矩阵理论及其应用⒚北京:北京航空学院出版社,1988,116～117
2　Hoffman K M,Kunze R A· Linear Algebra· New Jersey:Prentice-Hall, 1971,227～231
3　郑大钟⒚线性系统理论⒚北京:清华大学出版社,1990,148～156

Practical Criteria of Cyclic Matrix

Li Jiuping

(Shandong Polytechnic University, Dept of Math and Physics)

Abstract　Two practical criteria of cyclic matrix are given in this paper· One is necessary and sufficient and the other is sufficient·

Key words　cyclic matrix; cyclic vector; minimal polynomial