

Φ 序 Lipschitz 算子的不动点定理 及其迭代逼近

盛梅波

董祥南

(基础课部)

(江西师大数学系)

摘 要 定义了 Φ 序 Lipschitz 算子,利用构造迭代收敛序列的方法讨论这类算子的不动点存在性问题,得出几个不动点定理,并讨论了其迭代逼近^[9].

关键词 增算子; Φ 序 Lipschitz 算子;凹(凸)算子;锥;Ishikawa 迭代格式

分类号 O 177 .91; O 189 .2

0 引 言

序是数学中的重要概念之一,数学的许多分支中有由序定义派生的概念,增算子就是其中之一,对增算子有许多细致的研究,建立了许多不动点存在定理,见文献[3~10],但在这些结论中,连续型和紧性条件是两个基本条件,而这两个条件的验证是不方便的或很难满足,特别是在用算子理论考察无界域上的非线性积、微分方程时困难更大^[13]

笔者先给出一类新的序算子 Φ 序 Lipschitz 算子的定义,在凸锥导出的半序 Banach 空间框架下,利用构造收敛序列的方法研究其不动点存在性问题,在较弱的序条件下得出几个不动点定理,并讨论了其迭代逼近^[13]

1 预备知识和基本定义

以下总假定 E 是实 Banach 空间, D 是 E 中非空子集, P 是 E 中正规锥,其正规常数为 N , $\leq$ 是由 P 诱导的 E 上半序,即 $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$ ^[13] 设 $u_0 \in E, v_0 \in E$, 记

$$BS_A(D) = \{x \in D \mid x \leq Ax\}, US_A(D) = \{x \in D \mid Ax \leq x\} \quad [13]$$

另外,用 $D_{[u_0, v_0]}^{(N)}$ 表示具有下界 u_0 和上界 v_0 的集合 D ,即 $\forall x \in D, u_0 \leq x \leq v_0$ ^[13]

定义 1^[4,5] 设算子 $A: D \rightarrow E$, 称 A 为 D 上增算子,如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \leq x_2$, 有

$$Ax_1 \leq Ax_2 \quad (1)$$

定义 2^[4,5] 设算子 $A: D \rightarrow E$, 称 A 为 D 上凹算子,如果 $\forall t \in [0, 1], x, y \in D$, 当 $x \leq y$, 则

$$A[tx + (1-t)y] \geq tAx + (1-t)Ay \quad (2)$$

称 A 为 D 上凸算子, 若 $\forall t \in [0, 1], x, y \in D$, 当 $x \leq y$, 则

$$A(tx + (1-t)y) \leq tAx + (1-t)Ay \quad (3)$$

定义 3 设算子 $A: D \rightarrow E$, 如果存在二元泛函 $\Phi_{x,y}: D \times D \rightarrow R^+ = [0, +\infty)$, 满足 $\Phi_{x,y} \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in D$, 且有 $x \leq y$, 则

$$Ay - Ax \leq \Phi_{x,y}(y - x) \quad (4)$$

称 A 为 D 上的 Φ 序 Lipschitz 算子, $\Phi_{x,y}$ 称为算子 A 的特性泛函⁽¹³⁾

显然, $\forall x \in D, \Phi_{x,y} = 0$ ⁽¹³⁾

注 1 若 $\sup \{\Phi_{x,y} \mid x, y \in D\} < 1$, 则称 A 为 D 上 Φ 序压缩算子⁽¹³⁾

定义 4 设算子 $A: D \rightarrow E$, 称 A 在 θ 处是弱闭的, 如果任意 D 中弱收敛序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, 恒有 $(I-A)x_n = Ax_n \xrightarrow{\omega} \theta$ 其中 $\xrightarrow{\omega}$ 表示点列的弱收敛⁽¹³⁾

2 主要结果及其证明

定理 1 设 D 是 E 中闭子集, $A: D \rightarrow D$ 是增的 Φ 序 Lipschitz 算子, 如果

$$(k_1) \quad \exists x_0 \in BS_A(D), \text{ 使 } \|Ax_0 - x_0\| < \frac{1}{N} \quad (13)$$

则 A 在 D 上存在不动点 x^* , 作迭代序列 $x_n = Ax_{n-1} (n \geq 1)$, 有误差估计式

$$\|Ax_0 - x^*\| \leq \frac{(N \|Ax_0 - x_0\|)^n}{N - N^2 \|Ax_0 - x_0\|} \quad (5)$$

证明 设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是定理中所述序列, 则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一 Cauchy 序列⁽¹³⁾事实上, 由于 A 是增算子, 易知 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是单调递增的⁽¹³⁾又 A 是 Φ 序 Lipschitz 算子, 故有

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} - x_n &= Ax_n - Ax_{n-1} \leq \\ &\Phi_{x_n, x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \leq \\ &\|x_n - x_{n-1}\| (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

由 P 是 E 的正规锥, 则有

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq N \|x_n - x_{n-1}\|^2 \quad (6)$$

另外, 条件 (k_1) 成立, 利用数学归纳法得

$$\begin{aligned} \|x_{n-1} - x_n\| &\leq N^{1+2^1+\dots+2^{n-1}} \|x_1 - x_0\|^{2^n} = N^{2^n-1} \|x_1 - x_0\|^{2^n} = \\ &\frac{1}{N} (N \|Ax_0 - x_0\|)^{2^n} < \frac{1}{N} (N \|Ax_0 - x_0\|)^n \end{aligned}$$

对任意自然数 n 与 m , 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| < \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{N} (N \|Ax_0 - x_0\|)^{n+i} = \\ &\frac{(N \|Ax_0 - x_0\|)^n}{N} \sum_{i=0}^{m-1} (N \|Ax_0 - x_0\|)^i \leq \frac{(N \|Ax_0 - x_0\|)^n}{N(1 - N \|Ax_0 - x_0\|)} \quad (7) \end{aligned}$$

因 $N \|Ax_0 - x_0\| < 1$, 从而 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 E 中 Cauchy 序列, 故 $\exists x^* \in E$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, 又 D 是闭集, 故 $x^* \in D$ ⁽¹³⁾则 x^* 是 A 在 D 上的不动点⁽¹³⁾事实上, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 D 中单调递增收敛于 x^* 的序列, 则对 $\forall n, x_n \leq x^*$, 于是 $x_{n+1} = Ax_n \leq Ax^*$, 从而 $0 \leq Ax^* - x_{n+1} = Ax^* - x_n \leq \Phi_{x^*, x_n}(x^* - x_n)$

$-x_n) \leq \|x^* - x_n\| (x^* - x_n)$ (13) 即而有 $\|x_{n+1} - Ax^*\| \leq N \|x^* - Ax_n\|^2$ 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_{n+1} \rightarrow Ax^*$, 由极限的唯一性可知 $Ax^* = x^*$ (13)

另外, 在 (7) 中令 $m \rightarrow \infty$ 可推出 (5) 式 (13)

注 2 A 是满足定理 1 的条件且有两个可比较互异的不动点 x^*, y^* , 则 $\|x^* - y^*\| \geq 1$ (13)

注 3 在定理 1 的条件, 作迭代

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A^i x_0$$

则序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于算子的不动点且有误差估计式

$$\|y_n - x^*\| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{(1 - N \|Ax_0 - x_0\|)^2}$$

注 4 定理 1 中条件 (k_1) 可换成

$$(k_2) \quad x_0 \in US_A(D), \|Ax_0 - x_0\| < 1/N$$

其结论仍然成立 (13)

定理 2 设 D 是 E 中闭凸子集, 算子 $A: D_{\alpha_0}^{\eta_0} \rightarrow D_{\alpha_0}^{\eta_0}$ 是凹增的 Φ 序 Lipschitz 算子, A 在 θ 处是弱闭的, $BS_A(D) \neq \emptyset$ (13) 则 A 在 D 中有不动点, 并且 A 的 Ishikawa 弱迭代式强收敛于算子的不动点 (13)

证明 取 $\beta \in (0, 1)$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0, 1)$ (13) 使 $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ 收敛 (13) D 是闭凸集, $BS_A(D) \neq \emptyset$, 构造 A 的 Ishikawa 迭代格式:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\in BS_A(D); \\ y_n &= (1 - \beta)x_n + \beta Ax_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n y_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

显然, $x_n, y_n \in D$, 利用数学归纳法可得

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x_n &\in BS_A(D), y_n \in BS_A(D) \quad n \geq 0; & \textcircled{2} \quad y_n &\leq y_{n+1} \quad n \geq 0; \\ \textcircled{3} \quad x_n &\leq x_{n+1} \quad n \geq 0; & \textcircled{4} \quad x_n &\leq y_n \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

事实上, $x_0 \in BS_A(D)$, $x_0 \leq Ax_0$, A 是增算子, $A^2 x_0 \geq Ax_0 \geq x_0$, 从而

$$\begin{aligned} Ay_0 - y_0 &= A[(1 - \beta)x_0 + \beta Ax_0] - y_0 \geq (1 - \beta)Ax_0 + \beta A^2 x_0 - y_0 = \\ &= (1 - \beta)(Ax_0 - x_0) + \beta(A^2 x_0 - Ax_0) \geq \theta \end{aligned}$$

即 $Ay_0 \geq y_0$, 则 $A^2 y_0 \geq Ay_0 \geq y_0$

$$\begin{aligned} Ax_1 - x_1 &= A[(1 - \alpha)x_0 + \alpha Ay_0] - x_1 \geq (1 - \alpha)Ax_0 + \alpha A^2 y_0 - x_1 = \\ &= (1 - \alpha)(Ax_0 - x_0) + \alpha(A^2 y_0 - Ay_0) \geq \theta \end{aligned}$$

则 $x_1 \in BS_A(D)$ (13) 设 $x_k \in BS_A(D)$, $y_k \in BS_A(D)$ (13)

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} - x_{k+1} &= A[(1 - \alpha)x_k + \alpha Ay_k] - x_{k+1} \geq (1 - \alpha)Ax_k + \alpha A^2 y_k - x_{k+1} = \\ &= (1 - \alpha)(Ax_k - x_k) + \alpha(A^2 y_k - Ay_k) \geq \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ay_{k+1} - y_{k+1} &= A[(1 - \beta)x_{k+1} + \beta Ax_{k+1}] - y_{k+1} \geq (1 - \beta)Ax_{k+1} + \beta A^2 x_{k+1} - y_{k+1} = \\ &= (1 - \beta)(Ax_{k+1} - x_{k+1}) + \beta(A^2 x_{k+1} - Ax_{k+1}) \geq \theta \end{aligned}$$

因此, $x_{k+1}, y_{k+1} \in BS_A(D)$, 故式 (1) 成立

$$y_{n+1} - y_n = (1 - \beta)x_{n+1} + \beta Ax_{n+1} - (1 - \beta)x_n - \beta Ax_n =$$

$$\begin{aligned} & (1 - \beta)(x_{n+1} - x_n) + \beta(Ax_{n+1} - Ax_n) \\ x_{n+1} - x_n &= (1 - \alpha)x_n + \alpha Ay_n - x_n = \alpha[(1 - \beta)x_n + \beta(Ax_n) - x_n] \geq \\ & \alpha[(1 - \beta)Ax_n + \beta Ax_n - x_n] \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时, $y_0 - x_0 = \beta(Ax_0 - x_0) \geq \theta$ 即 $Ay_0 \geq Ax_0 \geq x_0$, 从而 $x_1 - x_0 = (1 - \alpha)x_0 + \alpha Ay_0 - x_0 = \alpha(Ay_0 - x_0) \geq \theta$ 则 $x_1 \geq x_0$ (13) 设 $x_k \leq x_{k+1}$, 即

$$Ax_k \geq Ax_{k+1}, x_{k+2} - x_{k+1} \geq \alpha_{k+1}[(1 - \beta)Ax_{k+1} + \beta Ax_{k+1} - x_{k+1}] \geq \theta$$

故 $x_{k+1} \leq x_{k+2}$, 从而式(3)成立, 类似式(2)成立, 又

$$y_n - x_n = (1 - \beta)x_n + \beta Ax_n - x_n = \beta(Ax_n - x_n) \geq \theta$$

从而式(4)成立

下面证明序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 均是 Cauchy 序列(13)

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= (1 - \beta)x_n + \beta Ax_n - (1 - \beta)x_{n-1} - \beta Ax_{n-1} = \\ & (1 - \beta)(x_n - x_{n-1}) + \beta(Ax_n - Ax_{n-1}) \leq [(1 - \beta) + \beta\|x_n - x_{n-1}\|](x_n - x_{n-1}) \\ x_n - x_{n-1} &= (1 - \alpha)x_n + \alpha Ay_n - x_n = \alpha(Ay_n - x_n) \leq \alpha(v_0 - u_0) \end{aligned}$$

其中由于 $x_n, Ay_n \in D_{u_0}^{v_0}$ (13)

$$\text{对 } \forall n, m \quad \theta \leq x_{n+m} - x_n = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{n+i+1} - x_{n+i}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i} (v_0 - u_0)$$

从而 $\|x_{n+m} - x_n\| \leq N \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i} \|v_0 - u_0\| \leq N \|v_0 - u_0\| \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i} \right)$ (13) 又 $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha$ 收敛, 则

$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, $\|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$, 因此 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列(13)

另外 $\|x_{n+m} - x_n\| \leq N \alpha \|v_0 - u_0\|$,

$$y_n - y_{n-1} \leq (1 - \beta + \beta\|x_n - x_{n-1}\|)(x_n - x_{n-1}) \leq (1 - \beta + \beta N \alpha \|v_0 - u_0\|)(x_n - x_{n-1})$$

$$y_{n+m} - y_n = \sum_{i=0}^{m-1} (y_{n+i+1} - y_{n+i}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \beta + \beta N \alpha_{n+i} \|v_0 - u_0\|)(x_{n+i} - x_{n+i-1})$$

则 $\|y_{n+m} - y_n\| \leq N \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \beta + \beta N \alpha_{n+i} \|v_0 - u_0\|) \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq$

$$N \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \beta + \beta N \alpha_{n+i} \|v_0 - u_0\|) \alpha_{n+i} \|v_0 - u_0\| \leq$$

$$N(1 - \beta) \|v_0 - u_0\| \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i} \right) + \beta N^2 \|v_0 - u_0\|^2 \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n+i}^2 \right)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|y_{n+m} - y_n\| \rightarrow 0$, 那么 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一 Cauchy 序列, 从而分别存在 $p, q \in D$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$, 则 $p = q$ 且 $Ap = p$ (13)

事实上, $x_n \leq x_{n+1}, x_n \rightarrow p$, 从而 $x_n \leq p$, 即 $Ax_n \leq Ap$, 则

$$\theta \leq Ap - Ax_n \leq \|p - x_n\| (p - x_n)$$

故 $Ax_n \rightarrow Ap$ (13) 同理 $Ay_n \rightarrow Aq (n \rightarrow \infty)$, 又 A 在 θ 处弱闭, 故 $(I - A)x_n \xrightarrow{\theta} \theta$ 即 $x_n \xrightarrow{A} Ax_n \xrightarrow{\theta} \theta$ 由于 $y_n - x_n = \beta(Ax_n - x_n) \xrightarrow{\theta} \theta$ 另外 $y_n - x_n \rightarrow q - p$, 因此 $p = q$ (13)

由(8)式知 $q = (1 - \beta)p + \beta Ap$ (13) 故 $Ap = p$ (13)

定理 3 设 D 是 E 中闭凸子集, $A: D_{u_0}^{v_0} \rightarrow D_{u_0}^{v_0}$ 是凸增 Φ 序 Lipschitz 算子, A 在 θ 处弱闭,

$US_A(D) \neq \emptyset$, 则 A 在 D 中有不动点, 且 A 的 Ishikawa 弱迭代格式强收敛于不动点^[13]

证明 取 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ 收敛, 因 $US_A(D)$, 构造 A 的 Ishikawa 弱迭代格式

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\in US_A(D), \\ y_n &= (1-\beta)x_n + \beta Ax_n \quad n=0, 1, 2, \dots \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n y_n \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

类似于定理 2 的证明, 当 $n \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x_n &\in US_A(D), y_n \in US_A(D); & \textcircled{2} x_{n+1} &\leq x_n; \\ \textcircled{3} y_n &\leq x_n; & \textcircled{4} y_{n+1} &\leq y_n \end{aligned} \quad (13)$$

且 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 均是 D 中 Cauchy 序列, 那么分别存在 $p, q \in D$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$ ^[13] 则 $p = q$, 且 $Ap = p$ ^[13]

参 考 文 献

- 1 M O Osilike. Stable iteration procedures for strong pseudocontractions and nonlinear operator equations of the accretive type. J Math Anal Appl, 1996, 204: 677~692
- 2 J Gwinner. Fixed point theorems of operators with Lipschitz iterations. Nonlinear Analysis, 1992, 19(4): 353~363
- 3 S Heikkilä. On fixed points through a generalized iteration method with applications to differential and integral equations involving discontinuities. Nonlinear Analysis, 1990, 14(5): 353~363
- 4 H Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in Banach spaces. SIM Review. 1976, 18: 620~709
- 5 Gou Dajun. V Lakshmikantham. Nonlinear problems on abstract cones. Academic press. Boston Lre, 1988
- 6 李福义, 梁展东. Φ 凹(凸)算子不动点及应用. 系统科学与数学, 1994, 14(4): 355~360
- 7 杜一宏. 一类非紧算子的不动点及应用. 数学学报, 1989, 32(5): 618~627
- 8 Tan Kokkeong. Xu Hongkun. Fixed point theorems for Lipschitzian semigroups in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1993, 20(4): 395~404
- 9 孙经先. 增算子的不动点和广义不动点. 数学学报, 1989, 32(5): 187~198
- 10 郭大均. 非线性泛函分析. 济南: 山东科学技术出版社, 1985

(下转第 95 页)

参 考 文 献

- 1 钱晨¹⁹.税收管理¹⁹.北京:中国人民大学出版社,1996.193~207
- 2 马月才等¹⁹.企业财务决策实务¹⁹.北京:中国审计出版社,1995.4~15
- 3 刘荣荣等¹⁹.税收理论与实务¹⁹.广州:广东高等教育出版社,1995.329~353
- 4 财政部注册会计师全国考试委员会办公室编¹⁹.税法¹⁹.大连:东北财经大学出版社,1996.406~417

(上接第 74 页)

Fixed Points Theorems of Φ Ordered Lipschitz Operator with the Constructions of Heration Convergence Procedures

Shen Meibo

(Basic Courses Department)

Dong Xiangnan

(Mathematics Department , Jiang xi Normal University)

Abstract The concept of Φ ordered Lipschitz operator is defined, then the existence problem of fixed point and the construction problem of iteration convergence sequence of this kind of operator is investigated. Obtains some new and interesting fixed point theoremes.

Key words increasing operator; Φ ordered Lipschitz operator; ordered concave (convex) opertor; normal cone; ishikawa iteration procedures