

一类几何不等式的两个定理及其应用

刘 健

(土木工程系)

摘 要 建立了涉及三角形内部任意 n 个点的两个加权不等式, 讨论了它们的一些应用^[13]

关键词 三角形; 不等式; 点; 正数

分类号 O 178

0 引言与主要结果

笔者在文献[1]中给出了下述结论: 设 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1, r_2, r_3 , 则当 $k \geq 1$ 时有

$$\frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \frac{1}{r_3^k} \geq \left(\frac{2}{R} \right)^k + \frac{2}{r^k}, \quad (1)$$

其中 R, r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径^[13]

1994年, 杨学枝^[2]得到类似的下式:

$$\frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \frac{1}{r_3^k} \geq \frac{2}{r^{k-1}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \quad (2)$$

其中 k 为自然数^[13]

当 $k=1$ 时, 显然式(1)与式(2)成为同一个不等式^[13]这促使我们猜测式(2)一般地对 $k \geq 1$ 成立, 而无需要求 k 为自然数^[13]经过很长一段时间的考虑, 我们不仅获得了证明(见后), 而且发现了下述一般性结论:

定理 1 设 $\triangle ABC$ 内部任意 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} ($i=1, 2, \dots, n$), 正数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n k_i = k-1$ ($k > 1$)^[13] 又记 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 与半周及面积分别为 a, b, c, s, Δ 则对任意正数 x, y, z 有

$$\frac{a(s-a)^k}{\prod_{i=1}^n r_{i1}^{k_i}} x^k + \frac{b(s-b)^k}{\prod_{i=2}^n r_{i1}^{k_i}} y^k + \frac{c(s-c)^k}{\prod_{i=1}^n r_{i3}^{k_i}} z^k \geq 2(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \Delta \quad (3)$$

等号当且仅当 $x:y:z = \tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} : \tan \frac{C}{2}$ 且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均重合于 $\triangle ABC$ 的内心时成立^[13]

用类似于定理 1 的证法另外得到

定理 2 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为 ΔABC 内部任意 n 个点, $\angle BP_iC, \angle CP_iA, \angle AP_iB$ 的平分线分别为 $w_{i1}, w_{i2}, w_{i3} (i=1, 2, \dots, n)$, 正数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n k_i = k-1 (k>1)$; 正数 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n q_i = 2$, 又记 ΔABC 的三边为 a, b, c ; $\Delta_i B_i C_i$ 的三边与面积分别为 $a_i, b_i, c_i, \Delta_i (i=1, 2, \dots, n)$ (13) 则对任意正数 x, y, z 有

$$x^k a^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^n a_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^n w_{i1}^{k_i}} + y^k b^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^n b_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^n w_{i2}^{k_i}} + z^k c^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^n c_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^n w_{i3}^{k_i}} \geq 2^{k+1} (yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \prod_{i=1}^n \Delta_i^{\frac{1}{2}q_i}, \quad (4)$$

等号当且仅当 $x:y:z = \cot A : \cot B : \cot C$, $\Delta_i B_i C_i \sim \Delta ABC (i=1, 2, \dots, n)$ 且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均为 ΔABC 的外心时成立 (13)

1 定理的证明

1.1 定理 1 的证明

引理 1^[3] 符号同前, 则对 ΔABC 内部任一点 P 有

$$(s-a)r_2r_3 + (s-b)r_3r_1 + (s-c)r_1r_2 \leq sr^2, \quad (5)$$

等号当且仅当 P 为 ΔABC 的内心时成立 (13)

引理 2^[3] 符号同前, 则以 $\overline{a(s-a)}, \overline{b(s-b)}, \overline{c(s-c)}$ 为边长可构成面积为 $\frac{1}{2}\Delta$ 的三角形 $A'B'C'$, 且 $\Delta B'C'$ 与 ΔABC 的内角间有关系: $A' = \frac{\pi-A}{2}, B' = \frac{\pi-B}{2}, C' = \frac{\pi-C}{2}$ (13)

引理 3^[4] 设 $u_j, v_j, w_j (j=1, 2, \dots, m)$ 均为正数, 正数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 满足 $\sum_{j=1}^m k_j = k-1$ 其余符号同定理 2, 则

$$x^k \frac{\prod_{i=1}^n a_i^{q_i}}{\prod_{j=1}^m u_j^{k_j}} + y^k \frac{\prod_{i=1}^n b_i^{q_i}}{\prod_{j=1}^m v_j^{k_j}} + z^k \frac{\prod_{i=1}^n c_i^{q_i}}{\prod_{j=1}^m w_j^{k_j}} \geq \frac{4(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \prod_{i=1}^n \Delta_i^{\frac{1}{2}q_i}}{\prod_{j=1}^m (v_jw_j + w_ju_j + u_jv_j)^{\frac{1}{2}k_j}}, \quad (6)$$

等号当且仅当 $\Delta_1 B_1 C_1 \sim \Delta_2 B_2 C_2 \cdots \Delta_n B_n C_n$, 且 $x:y:z = u_j:v_j:w_j = \cot A_1 : \cot B_1 : \cot C_1 (j=1, 2, \dots, m)$ 时成立

下证定理 1:

在引理 3 的不等式 (6) 中, 令 $n=1, q_1=2$, $\Delta_1 B_1 C_1$ 全等于引理 2 中的 $\Delta B'C'$; 然后将 j, m 分别换成 i, n , 得

$$\frac{a(s-a)}{\prod_{i=1}^n u_i^{k_i}} x^k + \frac{b(s-b)}{\prod_{i=1}^n v_i^{k_i}} y^k + \frac{c(s-c)}{\prod_{i=1}^n w_i^{k_i}} z^k \geq \frac{2(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \Delta}{\prod_{i=1}^n (v_iw_i + w_iu_i + u_iv_i)^{\frac{1}{2}k_i}} \quad (7)$$

又在 ΔABC 中易证:

$$(s-a)(s-b)(s-c) = sr^2, \quad (8)$$

从而知引理 1 的不等式 (5) 等价于

$$\frac{r_2r_3}{(s-b)(s-c)} + \frac{r_3r_1}{(s-c)(s-a)} + \frac{r_1r_2}{(s-a)(s-b)} \leq 1 \quad (9)$$

于是在(7)中令 $u_i = \frac{r_1}{s-a}, v_i = \frac{r_2}{s-b}, w_i = \frac{r_3}{s-c}$, 就有

$$v_i w_i + w_i u_i + u_i v_i \leq 1 \quad (13)$$

(其中 $i=1, 2, \dots, n$) 所以

$$\frac{a(s-a)x^k \prod_{i=1}^n (s-a)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n r_1^{k_i}} + \frac{b(s-a)y^k \prod_{i=1}^n (s-b)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n r_2^{k_i}} + \frac{c(s-a)z^k \prod_{i=1}^n (s-c)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n r_3^{k_i}} \geq 2(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \Delta$$

注意到 $(s-a) \prod_{i=1}^n (s-a)^{k_i} = (s-a)^k$ 等, 由上式即得不等式(3), 且易确定其等号成立的条件(详略)(13)定理1证毕,

1.2 定理2的证明

首先, 我们给出众知的 Gerasimov 不等式(见文献[3]):

$$\frac{r_2 r_3}{bc} + \frac{r_3 r_1}{ca} + \frac{r_1 r_2}{ab} \leq \frac{1}{4} \quad (10)$$

的下述加强:

引理4 设 P 为 $\triangle ABC$ 内部任一点, $\angle BPC, \angle CPA, \angle APB$ 的平分线分别为 w_1, w_2, w_3 , 则

$$\frac{w_2 w_3}{bc} + \frac{w_3 w_1}{ca} + \frac{w_1 w_2}{ab} \leq \frac{1}{4} \quad (11)$$

等号当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的外心时成立(13)(证略)

下证定理2:

在引理3的不等式(6)中, 令 $m=n, j=i, u_j = \frac{w_1}{a}, v_j = \frac{w_2}{b}, w_j = \frac{w_3}{c}, (i=j=1, 2, \dots, n)$, 则

由引理4知 $v_j w_j + w_j u_j + u_j v_j \leq \frac{1}{4} (13) (j=1, 2, \dots, n)$, 于是利用 $\sum_{j=1}^m k_j = \sum_{i=1}^n k_i = k-1$ 便知不等式(4)成立, 且确定其等号成立的条件(略)(13)定理2证毕(13)

2 定理1的应用

在式(3)中取 $x = \frac{1}{s-a}, y = \frac{1}{s-b}, z = \frac{1}{s-c}$, 利用式(8)易得

推论1.1 设 $k_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则对 $\triangle ABC$ 内部任意 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 有

$$\frac{a}{\prod_{i=1}^n r_1^{k_i}} + \frac{b}{\prod_{i=2}^n r_1^{k_i}} + \frac{c}{\prod_{i=1}^n r_3^{k_i}} \geq \frac{2s}{r^{\sum k_i}}, \quad (12)$$

等号当且仅当 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均重合于 $\triangle ABC$ 的内心时成立

推论1.2 设 $k > 0$, 其余符号同前, 则对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 有

$$\frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \frac{1}{r_3^k} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{1}{r^k} \quad (13)$$

证 设 $\triangle ABC$ 形内另一点 P 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1', r_2', r_3' , 则按推论1.1有

$$\frac{a}{r_1 r_1^k} + \frac{b}{r_2 r_2^k} + \frac{c}{r_3 r_3^k} \geq \frac{2s}{r^{k+1}} \quad (14)$$

接着令 P' 为 ΔABC 的类似重心, 则有 $r_1' = \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$ 等, 于是由 (14) 立得式 (13) (13)

文献[2]中已证常见几何元素的三角形不等式:

$$\left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{r}{R}\right), \quad (15)$$

据此及式 (13) 就知前面的不等式 (2) 一般地对 $k > 0$ 成立 (13)

令 P 为锐角 ΔABC 的外心, 由 (14) 可得

推论 1.3 设 $k > 0$, 则对锐角 ΔABC 内部任一点 P 有

$$\frac{\tan A}{r_1^k} + \frac{\tan B}{r_2^k} + \frac{\tan C}{r_3^k} \geq \frac{s}{r^{k+1}} \quad (16)$$

另外, 在不等式 (3) 中, 令 $k=2$ 并作置换: $x \rightarrow \frac{x}{s-a}, y \rightarrow \frac{y}{s-b}, z \rightarrow \frac{z}{s-c}$, 容易得到下述二次型不等式:

推论 1.4 设正数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n k_i = 1$, 则

$$\frac{a}{\prod_{i=1}^n r_{i1}^{k_i}} x^2 + \frac{b}{\prod_{i=1}^n r_{i2}^{k_i}} y^2 + \frac{c}{\prod_{i=1}^n r_{i3}^{k_i}} z^2 \geq 2 \left(yz \cot \frac{A}{2} + zx \cot \frac{B}{2} + xy \cot \frac{C}{2} \right) \quad (17)$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均为 ΔABC 的内时成立

易知不等式 (17) 实际上推广了 Carlitz-Klamkin 不等式 (5) (13)

3 定理 2 的应用

在不等式 (4) 中, 令 $k=2, q_1=q_2=1, \Delta_{A_1B_1C_1} \cong \Delta ABC, \Delta_{A_2B_2C_2} \cong \Delta CAB$ 即可得

推论 2.1 设正数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n k_i = 1$, 则对任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{\prod_{i=1}^n w_{i1}^{k_i}} + \frac{y^2}{\prod_{i=1}^n w_{i2}^{k_i}} + \frac{z^2}{\prod_{i=1}^n w_{i3}^{k_i}} \geq 2(yz + zx + xy) \frac{1}{R}, \quad (18)$$

等号仅当 $x=y=z, \Delta ABC$ 为正三角形且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均为其中心时成立 (13)

在不等式 (4) 中令 $\Delta_{A_iB_iC_i} \cong \Delta ABC (i=1, 2, \dots, n)$, 立得

推论 2.2 符号同定理 2, 则

$$\frac{a^{k+1}}{\prod_{i=1}^n w_{i1}^{k_i}} x^k + \frac{b^{k+1}}{\prod_{i=1}^n w_{i2}^{k_i}} y^k + \frac{c^{k+1}}{\prod_{i=1}^n w_{i3}^{k_i}} z^k \geq 2^{k+1} (yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}k} \Delta \quad (19)$$

等号仅当 $x:y:z = \cot A : \cot B : \cot C$ 且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均重合于 ΔABC 的外心时成立

由定理 2 还易推得

推论 2.3 设正数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 与正数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n m_i = 1$, 则对任意实数 x, y, z 有

$$\frac{a}{\prod_{i=1}^n w_{i1}^{k_i}} x^2 + \frac{b}{\prod_{i=1}^n w_{i2}^{k_i}} y^2 + \frac{c}{\prod_{i=1}^n w_{i3}^{k_i}} z^2 \geq 4 \left(yz \prod_{i=1}^n \sin^{m_i} A_i + zx \prod_{i=1}^n \sin^{m_i} B_i + xy \prod_{i=1}^n \sin^{m_i} C_i \right), \quad (20)$$

等式仅当 $\Delta_i B_i C_i \sim \Delta ABC (i=1, 2, \dots, n)$, $x:y:z = \cos A : \cos B : \cos C$ 且 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均重于 ΔABC 的外心时成立^[13]

不等式(10)实际上加强推广了 Gerasimov 不等式⁽¹⁰⁾ ^[13]

应用定理 2(包括其推论)与涉及 ΔABC 和空间任一点 P 的林鹤一不等式(见文^[3]):

$$\frac{R_2 R_3}{bc} + \frac{R_3 R_1}{ca} + \frac{R_1 R_2}{ab} \geq 1 \quad (21)$$

(其中 R_1, R_2, R_3 分别表示 PA, PB, PC) 及其推论:

$$\frac{r_2 r_3}{bc R_2 R_3} + \frac{r_3 r_1}{ca R_3 R_1} + \frac{r_1 r_2}{ab R_1 R_2} \geq \frac{1}{4R^2} \quad (22)$$

还易得下述两个推论:

推论 2.5 对空间任一点 P 有

$$\frac{R_1^k}{\prod_{i=1}^n w_{i1}^{k_i}} + \frac{R_2^k}{\prod_{i=1}^n w_{i2}^{k_i}} + \frac{R_3^k}{\prod_{i=1}^n w_{i3}^{k_i}} \geq 2^k \overline{(4R+r)^r} \quad (23)$$

推论 2.6 设 $k > 1$, 则对 ΔABC 内部任一点 P 有

$$\frac{r_1}{a R_1^k} \prod_{i=1}^n a_i^{q_i} + \frac{r_2}{b R_2^k} \prod_{i=1}^n b_i^{q_i} + \frac{r_3}{a R_3^k} \prod_{i=1}^n c_i^{q_i} \geq \frac{2}{R^k} \prod_{i=1}^n \Delta_i^{\frac{1}{2} q_i}, \quad (24)$$

等号仅当 $\Delta_i B_i C_i \sim \Delta ABC (i=1, 2, \dots, n)$ 且 P 为 ΔABC 的外心时成立

不等式(24)从指数上推广了文献^[4]中定理 2 的不等式⁽¹⁴⁾ ^[13]

参 考 文 献

- 1 刘健. 几个新的三角形不等式, 见: 常庚哲主编, 数学竞赛: 第 15 辑. 长沙: 湖南教育出版社, 1992. 80~100
- 2 杨学枝, 一个几何不等式的指数推广, 见: 常庚哲主编, 数学竞赛: 第 21 辑, 长沙: 湖南教育出版社, 1994. 100~104
- 3 D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1980
- 4 刘健, 涉及多个三角形的不等式, 湖南数学年刊, 1995, 15(4): 29~41

Two Theroms for one Kind of Geometric Inequalities and Their Applications

Liu Jian

(Civil Engineering Department)

Abstract Two weighted ikequalities at n points in a triangle are established and their applications are discussed

Key words triangle; inequality; point; positive number