第 15 卷 第 4 期
1998 年 12 月
Journal of East China Jiaotong University
Vol.15 No.4
Dec. 1998

高速列车运动方程的解法

倪 国 良

(基础课部)

摘 要 介绍了求解高速列车运动方程的幂级数展开法⒆主要讨论启动和制动 2 种状态下高速列车运动方程的解法⒆分析表明:由于高速列车运动方程的幂级数形式解已找到,利用现代计算技术求解高速列车运动方程便可方便地进行⒆

关键词 泰勒系数的递推产生;非线性微分方程;列车运动方程

分类号 TH 113.2

0 引 言

我国列车牵引计算是根据《列车牵引计算规程》进行的⒀由中国铁道出版社于 1985 年出版的《列车牵引计算规程解析》[1]是根据我国的国情编写的⒀大多数的数据都是实测的并注明了测试的条件、时间、地点⒀因此比较可靠和实用⒀是列车牵引设计和运行的依据⒀

但是,该规程编写的背景值得一提:

1) 该规程考虑的作业方式是手算⒀因此,多数的非线性数学模型都用简单的二次三项式近似表示⒀这就限制了其计算的精度⒀

2) 该规程考虑的另一作业方式是图解⒀故引入了大量的图表、曲线⒀这就需要设计人员在大尺寸的坐标纸上精心作业⒀这也限制了其计算的精度和设计速度⒀

3) 该规程考虑的前提是列车是由司机按经验人工控制的⒀也即没有考虑最佳运行方式(耗能量少)的问题⒀

4) 该规程考虑列车时速为 90 km 以下⒀

应当指出:在计算机技术没有得到广泛应用的时代只能如此⒀今天,我们完全有条件来讨论改进和完善《列车牵引计算规程》⒀所有问题归结为统一描述列车运动的非线性数学模型⒀

1 列车运动方程

高速列车的运动方程按牛顿第二运动定律给出⒀启动和正常运行时为

$$\boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{R}_s = M\boldsymbol{a} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

收稿日期:1998-06-17 倪国良,男,1951 年生,讲师

式中:$\boldsymbol{F}_s$ 为受控于司机(或程序)的机车轮周牵引力,启动时为时间的函数,正常运行时一般为常数;$\boldsymbol{R}_s$ 为启动时的阻力,包括基本阻力,坡道、曲张、隧道空气附加阻力⒀一般是列车运动速度的函数;M 为考虑列车回转质量系数的列车质量($M=(1+\gamma)m$,γ为列车的回转质量系数),本文设定为常数⒀$\boldsymbol{v}_s$ 为列车运动的速度⒀

制动时,根据能量守恒定律

$$\frac{1}{2}M\boldsymbol{V}_0^2=\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{s}_B=\boldsymbol{R}_B\int\boldsymbol{v}_B\mathrm{d}t \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{V}_0$ 为制动时刻列车的速度(常数);$\boldsymbol{v}_B$ 为制动过程中列车的瞬时速度;$\boldsymbol{R}_B$ 为制动时的阻力;$\boldsymbol{s}_B$ 为制动行程⒀

式(2)两边同时对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_B}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{v}_B\mathrm{d}t+\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{v}_B=0 \tag{3}$$

代式(2)到式(3)得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_B}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}\frac{M\boldsymbol{V}_0^2}{2\boldsymbol{R}_B}+\boldsymbol{R}_B\boldsymbol{v}_B=0$$

整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{M\boldsymbol{V}_0^2}y\boldsymbol{v}_B=0 \tag{4}$$

式中:

$$y=\boldsymbol{R}_B^2\Big\backslash\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_B}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}⒀ \tag{4a}$$

由于阻力 $\boldsymbol{R}_s$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 与轮-轨的粘着、摩擦、列车外形(空气动力学)、气象等有密切的关系,因此它们都是速度的函数⒀故式(1)、(4)都是一阶非线生微分方程⒀求解初值问题虽然有多种数值算法,但都不能给出其解的解析表达式⒀

2 启动时列车运动方程的解

假设已知的牵引力、阻力和速度均用多项式表示

$$\boldsymbol{F}_s=\sum_{k=1}^{n}a_kt^k \tag{5}$$

$$\boldsymbol{R}_s=\sum_{k=1}^{m}b_kv_s^k \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}_s=\sum_{k=1}^{p}x_kt^k \tag{7}$$

将式(5)、(6)和(7)代入式(1)得

$$M\sum_{k=1}^{p}kx_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{m}b_k\left(\sum_{k=1}^{p}x_\mu t^\mu\right)^k=\sum_{k=1}^{n}a_kt^k \tag{8}$$

或

$$M\sum_{k=1}^{p}kx_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{m}b_k\left(\sum_{\mu_1=1}^{p}x_{\mu_1}t^{\mu_1}\sum_{\mu_2=1}^{p}x_{\mu_2}t^{\mu_2}\cdots\sum_{\mu_k=1}^{p}x_{\mu_k}t^{\mu_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kt^k$$

整理后可得

$$M\sum_{k=1}^{p} k x_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{m} b_k\left(\sum_{\mu_1=1}^{p}\sum_{\mu_2=1}^{p}\cdots\sum_{\mu_k=1}^{p}\prod_{\lambda=1}^{k} x_{\mu_\lambda} t^{s}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k \tag{8a}$$

式中:$S = M\sum_{r=1}^{k}\mu_r$

从(8a)可看出,其左部是一个关于 t 的 mp 次多项式;其右部为 $n(=mp)$ 次多项式。利用待定系数法使可列出求 p 个 x 的非线性方程。

下面举一纯数值的例子用手算来说明这种算法。假设牵引力函数的系数为 $F_s = 1 - e^{-t} \approx t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!}$;阻力函数的系数 $\{b_1 \quad b_2\} = \{4 \quad 5\}$;$M = 1, m = 2, p = 3, n = 6$。代入式(8),得

$$\sum_{k=1}^{6} k x_k t^{k-1} = x_x + 2x_2 t + 3x_3 t^2 + 4x_4 t^3 + 5x_5 t^4 + 6x_6 t^5$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_k\left(\sum_{\mu=1}^{6} x_\mu t^\mu\right)^k = b_1\left(\sum_{\mu=1}^{6} x_\mu t^\mu\right)^1 + b_2\left(\sum_{\mu=1}^{6} x_\mu t^\mu\right)^2$$

$$= 4\left(\sum_{\mu=1}^{6} x_u t^\mu\right)^1 + 5\left(\sum_{\mu=1}^{6} x_\mu t^\mu\right)^2 = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!}$$

比较上式两边 t 的同次项的系数可得如下非线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 = 1, \\ 4x_2 + 5x_1^2 = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}, \\ 4x_3 + 10x_1x_2 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, \\ 4x_4 + 10x_1x_3 + 5x_2^2 = -\frac{1}{4!} = -\frac{1}{24}, \\ 4x_5 + 10x_1x_4 + 10x_2x_3 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}, \\ 4x_6 + 10x_1x_5 + 10x_2x_4 + 5x_3^2 = -\frac{1}{6!} = -\frac{1}{720} \end{cases}$$

逐次代入解上面的方程组,可得

$$\{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\} = \{0.250 \quad -0.203 \quad 0.169 \quad -0.167 \quad 0.192 \quad -0.241\}$$

最后求得启动时该列车的运动方程为

$$v_s = 0.250t - 0.203t^2 + 0.169t^3 - 0.167t^4 + 0.192t^5 - 0.241t^6 \tag{9}$$

该列车启动的行程为

$$S_s = \int_0^{T_s} v_s \mathrm{d}t = 5.125T_s^2 - 0.068T_s^3 + 0.042T_s^4 - 0.033T_s^5 + 0.032T_s^6 - 0.034T_s^7 \tag{10}$$

式中:T_s 为启动时间。启动期间的平均速度为

$$v_s = \frac{S_s}{T_s} = 5.125T_s - 0.068T_s^2 + 0.042T_s^3 - 0.033T_s^4 + 0.032T_s^5 - 0.034T_s^6 \tag{11}$$

整个启动过程列车功耗为

$$W_s = \int_0^{S_s} F_s \mathrm{d}S = \int_0^{T_s} F_s v_s \mathrm{d}t \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{F}_s$ 由(5) 给定；$\boldsymbol{v}_s$ 由(9) 给定⒀式(12) 的积分函数为 t 的 12 次多项式(缺常数项和一次项)⒀其通项为

$$g_p = \sum_{k=1}^{6} \sum_{\substack{r=1 \\ k+r=p}}^{6} a_k x_r \qquad (p = 2, 3, \cdots, 12) \tag{12a}$$

3　制动时列车运动方程的解

假设已知

$$\boldsymbol{R}_B = \sum_{k=1}^{m} b_k v_B^k \tag{13}$$

代入式(4a)，得

$$y = \sum_{k=1}^{2m} a_k v_B^k \Big\backslash \sum_{k=1}^{m} k a_k v_B^{k-1} \tag{14}$$

式中

$$b_r = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\substack{m=1 \\ \mu+m=p}}^{m} a_\mu a_m \qquad (r = 2, 3, \cdots, 2m) \tag{14a}$$

由于(14) 的分子是 $\boldsymbol{v}_B$ 的 $2m$ 次多项式，而分母则是 $\boldsymbol{v}_B$ 的 $m-1$ 次多项式，即为一个假分式⒀根据部分分式展开(partial fraction expansion) 法则，可表示为一个整式加一个既约分式(reduced fraction)⒀如设法将该既约分式展开为泰勒级数，则(14) 就可写成一个关于 $\boldsymbol{v}_B$ 的幂级数形式⒀今假设制动时阻力和速度的关系与启动时 $\boldsymbol{R}_s$ 相同，即仍为

$$\boldsymbol{R}_B = \sum_{k=1}^{6} b_k \boldsymbol{v}^k = 4\boldsymbol{v}_B + 5\boldsymbol{v}_B^2$$

代入式(14) 可得

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{m} b_k b_\lambda \boldsymbol{v}_B^{k+\lambda}}{\sum_{k=1}^{m} k b_k \boldsymbol{v}_B^{k-1}} = \frac{25\boldsymbol{v}_B^4 + 40\boldsymbol{v}_B^3 + 16\boldsymbol{v}_B^2}{2(5\boldsymbol{v}_B + 2)} = 2.5\boldsymbol{v}_B^3 + 3\boldsymbol{v}_B^2 + 0.4\boldsymbol{v}_B - 0.8\frac{\boldsymbol{v}_B}{5\boldsymbol{v}_B + 2} \tag{14b}$$

注意到　$(x+a)^{-1} \approx a^{-1} - a^{-2}x + a^{-3}x^2$

便可得　$0.8\dfrac{\boldsymbol{v}_B}{5\boldsymbol{v}_B + 2} = 0.16\dfrac{\boldsymbol{v}_B}{\boldsymbol{v}_B + 0.4} \approx 2.5\boldsymbol{v}_B^3 - \boldsymbol{v}_B^2 + 0.45_B$

代到式(14b) 可得　$y \approx 5\boldsymbol{v}_B^3 + 2\boldsymbol{v}_B^2 + 0.8\boldsymbol{v}_B$

可见 y 可近似地表示为一个关于 $\boldsymbol{v}_B$ 的多项式，即一般地可写成

$$y = \sum_{k=1}^{p} d_k \boldsymbol{v}_R^k \tag{15}$$

现在假设需求的速度为 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_B(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^k$，代到式(4) 便可得到

$$\sum_{k=1}^{n} k x_k t^{k-1} + \frac{2}{M\boldsymbol{V}_0^2} \sum_{k=1}^{p} d_k \left(\sum_{p=1}^{n} x_p t^p \right)^{k+1} = 0 \tag{16}$$

式(16) 的第 1 项为关于 t 的 $n-1$ 次多项式；第 2 项为关于 t 的 np 次多项式⒀式(16) 展开后将成为

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + n x_n t^{n-1}$$
$$+ \frac{2}{MV_0^2}\left[d_1\left(\sum_{p=1}^{n} x_p t^p\right)^2 + d_2\left(\sum_{p=1}^{n} x_p t^p\right)^3 + \cdots + d_p\left(\sum_{p=1}^{n} x_p t^p\right)^{p+1}\right] = 0$$

或者写成

$$\sum_{k=1}^{np} A_k t^k = 0 \tag{16a}$$

令 $t = 1$ 即可求出其通项

$$A_\lambda = \lambda + \frac{2}{MV_0^2}\Bigg[d_1 \sum_{p1=1}^{n} \sum_{\substack{p2=1 \\ p1+p2=1}}^{n} x_{p1} x_{p2} + d_2 \sum_{p1=1}^{n} \sum_{p2=1}^{n} \sum_{\substack{p3=1 \\ p1+p2+p3=1}}^{n} x_{p1} x_{p2} x_{p3} +$$
$$\cdots + d_p \sum_{p1=1}^{n} \sum_{p2=1}^{n} \cdots \sum_{\substack{p(n+1)=1 \\ \sum p=2}}^{n} x_{p1} x_{p2} \cdots x_{p(n+1)}\Bigg] = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, n) \tag{16b}$$

当 n 个速度系数 x_k 求出后,可求出其制动距离

$$S_B = \left|\int_{V_m}^{0} v_B \mathrm{d}t\right| = \left|\int_m^0 \sum_{k=1}^{n} x_k t^k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k+1} V_m^{k+1}\right| \tag{17}$$

求解方程(17)可求得制动时间

$$\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} = 0 \tag{18}$$

列车所受的阻力为

$$F_R = Ma = M\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{d}t} = M\sum_{k=1}^{n} k x_k t^{k-1} \tag{19}$$

4　结　论

1) 通过计算机利用幂级数展开——待定系数法求解高速列车运动方程是可行且高效的⒀即使手算也是可以接受的⒀

2) 文中所涉及的已知数据均需表示成多项式的形式⒀对于用其函数表示的数据或实验数据则可利用拉格郎日插值拟合(或最小二乘拟合)为多项式的形式⒀

3) 对于用电力机车牵引的高速列车,在牵引计算中尚需考虑时变参数网络的问题⒀详细情况参见文献[2]⒀

参　考　文　献

1　列车牵引计算规程解析编写组 .列车牵引计算规程解析 .北京:中国铁道出版社,1985,8～68

2　Xiong Xiangbao. The more exact mathematic models for the dynamic AC electric traction system. Proceeding Intern Conference on Modelling, Simulation & Control (AMSE MSC'93), Chengdu, China, 1993,1:79～83

A Method for Solving the Motion Equations of High-Speed Train

Ni Guoliang

(Basic Courses Department)

Abstract This paper presents a general method (power series expansion) for solving the motion equations of a high speed train. It lays stress on the discussion about the two stateo(starting and braking) of a train. The analyses indicate that the solving of these equations is convenient to be carried into effect by means of modern calculating technique because the power - series form of the solutions can be found.

Keywards recursive generation of Taylor coefficients; nonlinear differential equation; motion equation of train