线性控制系统的推广极点配置法

胡 金 莲

(电气工程系)

摘 要 探讨了单输入线性定常控制系统当其状态不完全能控时的极点配置问题,得到了一个比传统极点配置法更具一般性的定理,即推广极点配置法19.定理指出了状态不完全能控的系统可在一定程度上配置极点及其算法19.笔者对该定理进行了严格证明,并举例说明了推广极点配置法的有效性19.

关键词 控制系统;状态反馈;极点配置;推广极点配置法

分类号 TP 202.1

0 引 言

在现代控制理论中,控制系统的极点配置是一个重要内容⒀极点的位置很大程度上决定了系统的各种品质指标,选取适当的极点使系统具有希望的品质指标,是系统目标的综合问题,具有较大的理论意义和工程意义⒀有关极点配置现有的定理(以往的极点配置法且称为传统极点配置法),都认为状态不完全能控的系统其极点不能任意配置[1~6],只有状态完全能控的系统才能任意配置极点⒀其实控制系统从状态能不能控制的意义上可分为 3 种类型⒀第 1 种是状态完全能控,第 2 种是状态完全不能控,第 3 种是状态不完全能控,即部分状态能控,部分状态不能控⒀传统极点配置法只讨论了第 1 和第 2 种类型的系统,对第 3 种类型的系统则认为不能配置极点[1,2]⒀其实对于第 3 种类型的系统,本文认为状态不能控的部分当然不能任意配置极点,而状态能控的部分则可以任意配置极点,即状态不完全能控的系统可在一定程度上配置极点⒀

1 推广极点配置法

传统极点配置法对系统状态完全能控的极点配置问题,早有成熟的结论,认为状态不完全能控的系统不能配置极点⒀本文着重讨论状态不完全能控时能否配置极点以及如何配置极点的问题,认为状态不完全能控的系统在一定程度上可配置极点,得到下面的定理,即推广极点配置法⒀

1.1 定理

收稿日期:1998-03-06 胡金莲,女,1964 年生,讲师

设单输入线性定常系数 $\Sigma=(A,B)$,A 为 $n\times n$ 矩阵,B 为 $n\times 1$ 向量,A 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两相异。系统 Σ的能控性矩阵 Q_k 的秩为 r,$0\leqslant r\leqslant n$,则可通过状态反馈任意配置 r 个极点。

状态反馈阵 $$K=\left[\left[a_n^*-a_n\quad a_{n-1}^*-a_{n-1}\quad\cdots\quad a_1^*-a_1\right]P_1\ \vdots\ \mathbf{0}\right]P^{-1}\tag{1}$$

式中:a_i^* 为希望极点所对应的特征多项式的系数;a_i 为系统 Σ能控部分的能控规范型对应的特征多项式的系数。

$$f^*(s)=s^r+a_1^*s^{n-1}+\cdots+a_{r-1}^*s+a_r^*\qquad f(s)=s^r+a_1s^{r-1}+\cdots+a^{r-1}s+a_r$$

$P=[V_1\ V_2\cdots V_n]$,P_1 是系统能控部分的对角线规范型化为能控规范型时的非奇异阵。而 V_i 是 A 的特征值 λ_i对应的向量,式(1)中的 $\mathbf{0}$ 是 $n-r$ 个 0 组成的行向量。

1.2　证明

整个证明分为 5 步完成。

第 1 步　因受控系统 Σ的秩为 r,所以有 r 个状态能控,$n-r$ 个状态不能控。还需确定哪些状态能控,哪些不能控,为此化 $\Sigma=(A,B)$ 为对角线规范型。

因 A 的特征值两两相异,存在一个非奇异变换[1],$X=P\hat{X}$,可将系统 Σ化为对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}=(\hat{A},\hat{B})$。

即化状态方程　　$\dot{X}=AX+Bu$

为

$$\dot{\hat{X}}=\hat{A}\hat{X}+\hat{B}u。\tag{2}$$

式中:$\hat{A}=P^{-1}AP$;　$\hat{B}=P^{-1}B$。

由于系统 Σ的能控性矩阵 Q_k 的秩为 r,$P=[V_1,V_2,\cdots,V_n]$,V_i 为 A 的特征值 λ_i对应的特征向量。$\hat{B}$ 中必有 r 个元素不为 0,其余 $n-r$ 个元素为 0,因此,不妨设

$\hat{B}=\{b_1,\cdots,b_r,0,\cdots 0\}^{\mathrm{T}}$,$b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$,$\hat{B}$ 中其余 $n-r$ 个元素皆为 0。

则对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}$的状态方程式(2)可写成如下块矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{X}}_1\\ \dot{\hat{X}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \hat{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}_1\\ \hat{X}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}u\tag{3}$$

式中:$\hat{X}_1=\begin{bmatrix}\hat{X}_1\\ \vdots\\ \hat{X}_r\end{bmatrix}$;$\hat{X}_2=\begin{bmatrix}\hat{X}_{r+1}\\ \vdots\\ \hat{X}_r\end{bmatrix}$;$\hat{B}_1=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_r\end{bmatrix}$;$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$,$\mathbf{0}$ 是系统 $n-r$ 个零元素组成的 0 向量;

$$\hat{A}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{bmatrix};\quad \hat{A}_2=\begin{bmatrix}\lambda_{r+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

显然对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}$可分为两个独立的子系统 $\hat{\Sigma}_1=(\hat{A}_1,\hat{B}_1)$ 和 $\hat{\Sigma}_2=(\hat{A}_2,\mathbf{0})$,即

$$\dot{\hat{X}}_1=\hat{A}_1\hat{X}_1+\hat{B}_1u\tag{4}$$

$$\dot{\hat{X}}_2=\hat{A}_2\hat{X}_2\tag{5}$$

式(4)完全能控,式(5)完全不能控。

第 2 步　由于子系统 $\hat{\Sigma}_1=(\hat{A}_1,\hat{B}_1)$ 完全能控,可任意配置极点[1],但其状态方程(4)为对角线规范型,配置极点有其特殊性,需先化式(4)为能控规范型。存在一个非奇异阵 P_1,作变换 $\hat{X}_1=P_1^{-1}X_1$,可将状态方程式(4)化为能控规范型,

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma_1 = (A_1, B_1),\\ &\dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 u\end{aligned}\right\}\text{⒀} \tag{6}$$

式中 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & I_{n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_r & \vdots & -a_{r-1} & \vdots & -a_1 \end{bmatrix}$; $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$; $A_1 = P_1 \hat{A}_1 P_1^{-1}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_0 \hat{A}_1 \\ \vdots \\ P_0 \hat{A}_1^{r-1} \end{bmatrix}$; $P_0 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] Q_{1k}^{-1}$,其中 Q_{1k} 是对角线规范型子系统 $\hat{\Sigma}_1 = (\hat{A}_1, \hat{B}_1)$ 的能控性矩阵,$Q_{1k} = [\hat{B}_1 \vdots \hat{A}_1 \hat{B}_1 \vdots \cdots \hat{A}_1^{r-1} \hat{B}_1]$⒀

第 3 步　对能控规范型 Σ_1 进行极点配置

设给定任意 r 个极点 $s_1, s_2, \cdots, s_r$,则此 r 个极点组成的特征多项式

$$f^*(s) = s^r + a_1^* s^{r-1} + \cdots + a_{r-1}^* s + a_r^* \tag{7}$$

设能控规范型 Σ_1 的特征多项式 $f(s) = s^r + a_1 s^{r-1} + \cdots + a_{r-1} s + a_r$,若将能控规范型子系统 Σ_1 的极点配置在 s_i 上($i = 1, 2, \cdots, r$),则状态反馈阵

$$K_1 = [a_r^* - a_r \quad a_{r-1}^* - a_{r-1} \quad \cdots \quad a_1^* - a_1]\text{⒀} \tag{8}$$

第 4 步　由能控规范型子系统 Σ_1 的状态反馈阵 K_1 求对角线规范型子系统 $\hat{\Sigma}_1$ 的状态反馈阵 $\hat{K}_1$ 及整个对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}$ 的状态反馈阵 $\hat{K}$⒀对角线规范型子系统 $\hat{\Sigma}_1$ 的状态反馈阵 $\hat{K}_1$ 与能控规范型子系统 Σ_1 的状态反馈阵 K_1 的关系为

$$\hat{K}_1 = K_1 P_1\text{⒀} \tag{9}$$

对角线规范型子系统 $\hat{\Sigma}_1$ 引入状态反馈后,其状态方程为

$$\dot{\hat{X}}_1 = (\hat{A}_1 - \hat{B}_1 \hat{K}_1) \hat{X}_1 + \hat{B}_1 u \tag{10}$$

结合式(5),有整个对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}$ 状态反馈后的状态方程

$$\dot{\hat{X}} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K}) \hat{X} + \hat{B} u, \tag{11}$$

所以,$\hat{\Sigma}$ 的状态反馈阵

$$\hat{K} = [\hat{K}_1 \ \vdots \ 0]\text{⒀} \tag{12}$$

第 5 步　由对角线规范型系统 $\hat{\Sigma}$ 的 $\hat{K}$ 求原受控系统●的状态反馈阵 K⒀原系统 Σ 引入状态反馈后,状态方程变为

$$\dot{X} = (A - BK) X + Bu \tag{13}$$

考虑到上述第 1 步中的非奇异变换 $X = P\hat{X}$,式(13)变为

$$\dot{\hat{X}} = P^{-1}(A - BK) P \hat{X} + P^{-1} B u \tag{14}$$

式(11)、(14)是同一个系统同一种形式,对应的矩阵应相等,故有

$$P^{-1}(A - BK) P = \hat{A} - \hat{B}\hat{K} \tag{15}$$

考虑到式(2),若 $B \neq 0$ 可得

$$K = \hat{K} P^{-1} \tag{16}$$

结合式(12)、(9)、(8),有 $K = [\hat{K}_1 \ \vdots \ 0] P^{-1} = [K_1 P_1 \ \vdots \ 0] P^{-1}$

即
$$\boldsymbol{K}=[[a_r^{*}-a_r\quad \cdots \quad a_1^{*}-a_1]\boldsymbol{P}_1 \ \vdots\ \boldsymbol{0}]\boldsymbol{P}^{-1} \tag{17}$$
其中式(12)和(17)中的 $\boldsymbol{0}$ 是 $n-r$ 个 0 元素组成的行向量⒀

1.3　算法与步骤

上述定理证明是构造性的,既证明了定理的成立,又给出了状态反馈阵的结构和算法步骤,还给出了推广极点配置法的具体内容⒀证明过程分 5 步完成,用该定理配置系统的极点则大致按 3 步进行:

第 1 步　求由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量组成的矩阵 $\boldsymbol{P}$,作非奇异变换,将系统 Σ 化为对角线规范型,分离出能控部分和不能控部分⒀

第 2 步　求出能控部分的对角线规范型和将其化为能控规范型的非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{P}_1$⒀

第 3 步　求能控规范型部分的状态反馈阵,然后用定理中的式(1)求出原受控系统的状态反馈阵⒀

2　举　例

已知　某受控系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix},$$
试将其极点配置在 $-10,-10,0$ 上⒀

解　已知系统的能控性矩阵的秩为 2,阶数为 3,不满秩,状态不完全能控,传统极点配置法认为该系统不能进行极点配置[1,2],而用推广极点法则可配置极点⒀

系统不完全能控,考虑到其秩为 2,说明部分状态能控,即两个状态能控,一个状态不能控⒀应用本文的定理,可进行极点配置,配置两个极点⒀

第 1 步　将系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 化为对角线规范型,将能控的状态和不能控的状态分离开来⒀

因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两相异,故存在非奇异变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}$,将系统 $\Sigma=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 化为对角线规范型 $\hat{\Sigma}=(\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{B}})$,易知
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&0\\1&4&0\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=0.5\begin{bmatrix}0&-4&-2\\0&1&1\\2&3&1\end{bmatrix},$$
$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix};\quad \hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$⒀

将对角线规范型 $\hat{\Sigma}=(\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{B}})$ 分为两个独立的子系统 $\hat{\Sigma}_1=(\hat{\boldsymbol{A}}_1,\hat{\boldsymbol{B}}_1)$ 和 $\hat{\Sigma}_2=(\hat{\boldsymbol{A}}_2,0)$,即
$$\hat{\boldsymbol{X}}_1=\hat{\boldsymbol{A}}_1\hat{\boldsymbol{X}}_1+\hat{\boldsymbol{B}}_1 u \tag{18}$$
$$\hat{\boldsymbol{X}}_2=\hat{\boldsymbol{A}}_2\hat{\boldsymbol{X}}_2 \tag{19}$$
式中 $\hat{\boldsymbol{A}}_1=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$;　$\hat{\boldsymbol{B}}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$;　$\hat{\boldsymbol{A}}_2=0$

显然,子系统 $\hat{\Sigma}_1$ 完全能控,子系统 $\hat{\Sigma}_2$ 完全不能控⒀

第 2 步　为配置完全能控的子系统 $\hat{\Sigma}_1$ 的极点,需将 $\hat{\Sigma}_1$ 化为能控规范型 Σ_1,作变换

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{X}_1,$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_0 \\ \boldsymbol{P}_0\hat{\boldsymbol{A}}_1 \end{bmatrix}, \quad 而\ \boldsymbol{P}_0 = [0 \quad 1]\boldsymbol{Q}_{1k}^{-1};$$

$$\boldsymbol{Q}_{1k} = [\hat{\boldsymbol{B}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{A}}_1\hat{\boldsymbol{B}}_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{Q}_{1k}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以　$\boldsymbol{P}_0 = [1 \quad -1]$;　$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;　$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

可将 $\hat{\Sigma}_1$ 化为能控规范型 $\Sigma_1 = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1)$,由式(6)可得 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$⒀

第 3 步　对能控规范型子系统 Σ_1 进行极点配置,再用变换矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}$ 求原受控系统 Σ 的状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$⒀

由题意知,希望的极点为 $s_1 = s_2 = -10$,由这些极点组成的特征多项式为

$$f^*(s) = s^2 + 20s + 100$$

而由 Σ_1 易知其特征多项式 $f(s) = s^2 + 3s + 2$,所以,Σ_1 状态反馈阵

$$\boldsymbol{K}_1 = [a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1] = [98 \quad 17]⒀ \tag{20}$$

由定理中的式(1)和(20)知,若将原受控系统的极点配置在希望的极点上,则状态反馈阵

$$\boldsymbol{K} = [[a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1]\boldsymbol{P}_1 \quad 0]\boldsymbol{P}^{-1} = [81 \quad -64 \quad 0] *$$

$$0.5 * \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad -194 \quad -133]⒀$$

3　结　论

传统极点配置法认为系统可任意配置极点的充分必要条件是系统的状态完全能控,认为不完全能控的系统不能配置极点⒀本文放宽了极点配置的条件,得到了即使状态不完全能控也可配置部分极点的结论,该结论更具一般性,适应面更广,既包括了传统极点配置法,又有传统极点配置法中没有的内容,可对状态不完全能控的系统配置极点,故称为推广极点配置法⒀推广极点配置法认为完全能控的系统能配置全部极点,完全不能控的系统完全不能配置极点,不完全能控的系统能配置部分极点⒀文中例子证明了不完全控的系统用推广极点配置法能配置部分极点⒀

本文中的定理全部包括了上述结论,以下从能控性矩阵的秩和系统阶数 n 的关系进一步讨论⒀在定理中

1) 当 $r = n$ 时,能控性矩阵满秩,系统完全能控,可任意配置极点⒀这是传统极点配置法中已有的结论,说明该定理包括了这种情形⒀

2) 当 $r = 0$ 时,系统完全不能控,当然完全不能配置极点⒀这属于传统极点配置法的内容,说明该定理也包括了这种情形⒀当 $r = 0$ 时,必有控制矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$,系统自由运动,当然不能控,也不能配置极点⒀

3) 当 $0<r<n$ 时,系统不完全能控,部分状态能控,部分状态不能控,即 r 个状态能控,$n-r$个状态不能控,传统极点配置法认为系统不能配置极点⒀该定理则认为可配置极点,即可配置 r 个极点,其余 $n-r$ 个极点不能配置,还给出了配置极点的具体算法和步骤⒀这是传统极点配置法中没有的结论,也是本文着重探讨的推广极点配置法⒀

参 考 文 献

1 于长官⒆现代控制理论⒆哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1988,28～166

2 郑大钟⒆线性系统理论⒆北京:清华大学出版社,1990,148～159

3 胡寿松等⒆自动控制理论(下)⒆北京:国防工业出版社,1984

4 易宜连⒆最优鲁棒极点配置控制器的设计,控制理论与应用,1991,(1):112～116

5 VEJTE,J·V·D·,Feedback Control Systems,U·S·A·:Prentice-Hall,Englewood,1986,340～358

6 Valase,M· and Olgac,N·,Efficient Pole Placement Technique for Linear Time-Variant SISO Systems,IEE,Control theory and Applications,1995,142(5):451～458

An Extended Pole Assignment Method for Linear Control Systems

Hu Jinlian

(Electronical Engineering Department)

Abstract A pole assignment problem of single input linear constant systems whose states are not all controlled is studied· A theorem,more general than the traditional pole assignment method,namely,extended pole assignment,is established· The extended pole assignment method shows that poles of systems whose states are not controlled can be placed at a certain degree,and also indicates pole assignment steps· In this paper,the theorem is proved,and an example is used to present the effectiveness of the extended pole assignment method·

Key words control system;state feedback;pole assignment;extended pole assignment method