

简谐振动方根能量的矢量图表示法

刘福之

(基础课部)

摘 要 提出简谐振动“方根能量”矢量图的概念(以下简称“根能量”矢量),指出了根能量矢量图和振幅矢量图的关系。利用根能量矢量图可以直观方便的分析或求出谐振动中的能量问题。

关键词 简谐振动;能量;矢量图

分类号 O 4

0 引 言

根能量矢量图直观的反映出质点做简谐振动时的动能、势能、总能量、相位和位移之间的关系,能够方便的求出合振动的能量^[1]

1 根能量矢量图

质点做简谐振动,振动方程为

$$X = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

任意时刻 t 质点振动的能量

$$\begin{aligned} E_o = E_p + E_k &= \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}KA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &E_o \cos^2(\omega t + \varphi) + E_o \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

上式可以改写为

$$(\overline{E_o})^2 = [\overline{E_o \cos(\omega t + \varphi)}]^2 + [\overline{E_o \sin(\omega t + \varphi)}]^2 \quad (3)$$

$$\text{定义 } \mathbf{B} = \overline{E_o \mathbf{B}_o} \quad (\text{方根能量矢量}) \quad (4)$$

$\mathbf{B}$ 有方根能量的量纲,在谐振动的合成中,合振动的根能量和各分振动的根能量间具有矢量的关系^[1]所以称 $\mathbf{B}$ 为方根能量矢量^[1]式中 $\mathbf{B}_o$ 表示方根能量矢量的单位矢量^[1]

选 x 轴为参考方向(图1),根能量矢量 $\mathbf{B}$ 以角速度 ω 逆时针旋转^[1]由式(3)可以看出:任意时刻 t , $\mathbf{B}$ 在 x 轴上投影的平方值,等于该时刻质点的势能,在 y 轴上投影的平方值,等于该

时刻质点的动能,即

$$\left. \begin{aligned} x &= B \cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \\ y &= B \sin(\omega t + \varphi) = \frac{E_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} E_p &= x^2 \\ E_k &= y^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

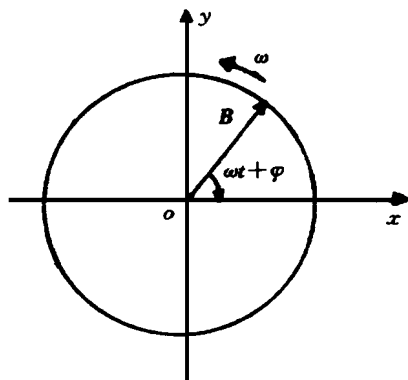


图1 根能量矢量图表示法

2 根能量矢量图和振幅矢量图的关系

用振幅矢量 A 的旋转研究谐振动是极为方便的,如图2所示^[13]

由式(1)和式(3)可以看出:振幅矢量 A 和根能量矢量 B 在任意时刻位相相同,即位置相同^[13]所以,如果将振幅矢量 A 同时赋予根能量矢量 B 的含义,则图2即是振幅矢量图,也是根能量矢量图,在分析质点振动情况时, $\vec{ON} = A$, 在分析振动能量时 $\vec{ON} = B$ ^[13]

3 根能量矢量图的应用

根能量矢量图把谐振动的动能、势能、总能量、位移及它们和位相的关系,相互的转换,直观形象的表示出来,利用根能量矢量图可以方便的研究谐振动中的能量问题^[13]

例如,在图2中可以看出, A 旋转一周,动能和势能的变化情况,并且能看出动能和势能变化的频率是质点振动频率的2倍^[13]

利用式(5)和式(6),从根能量矢量图可以求出任意位相时质点的势能或动能,也可以确定质点具有某一势能或动能时的位相^[13]例如,求质点动能和势能相等时的位相和位移^[13]从图3可以看出,该时刻位相 $\omega t + \varphi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ ^[13]对应的位移 $x = \pm \sqrt{2} A / 2$ ^[13]

利用根能量矢量的概念可以求合振动的能量^[13]

设同方向同频率的2个谐振动为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi);$$

合振动为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi);$$

合振动的振幅为

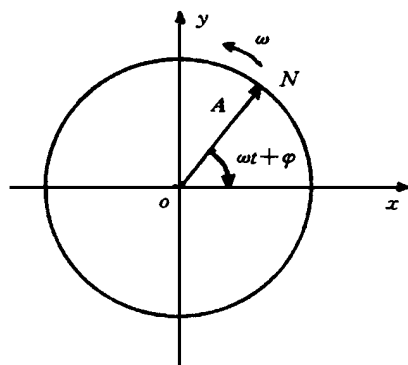


图2 矢量图表示法

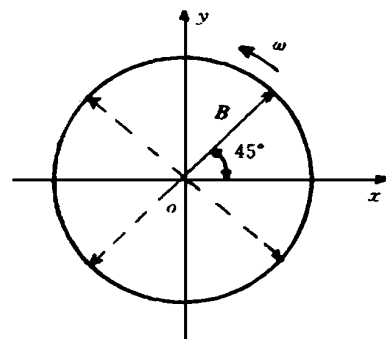


图3 动能和势能相等时的根能量矢量图

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi - \Phi) \quad (7)$$

由于 ω 不变, 质点质量 m 不变, 故 K 不变, 用 $K/2$ 乘式(7) 两边

$$E = E_1 + E_2 + 2 E_1 E_2 \cos(\Phi - \Phi) \quad (8)$$

上式可以写成

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos(\Phi - \Phi) \quad (9)$$

比较式(7) 和式(9) 可以看出, 合振动的根能量和分振动的根能量之间具有矢量关系^[13]。若以 B 代替式(7) 中的 A , 合振动振幅的计算公式即为合振动根能量的计算式^[13]

谐振动的合成, 在波动、光学、电磁场理论中都要用到, 所以这种计算方法可以进一步引申到这些领域中解决能量的计算问题^[13]

参 考 文 献

- 1 程守洙, 江之永^[19]普通物理学^[19]北京: 人民教育出版社, 1982
- 2 R 瑞斯尼克, D 哈里德^[19]物理学(美)^[19]北京: 科学出版社, 1982

The Vector Diagram Method of Simple Harmonic Vibration Energy

Liu Fuzhi

(Basic courses Department)

Abstract This article states the principle of simple harmonic vibration energy diagram. It points out the relationship between energy vector diagram and amplitude vector diagram. By applying energy vector diagram, we can analyze and solve the energy problem of vibration.

Key words simple harmonic vibration; energy; vector diagram