

亲和数*

周尚超 王 森 徐保根 邓毅雄

(基础课部)

摘 要 计算出 90 亿以下的亲和数 1360 对^[19].

关键词 数论;亲和数;完全数

分类号 O 157.1

令 $\sigma(x)$ 是 x 的所有因子(含 1 和 x)之和,如果 $\sigma(a) = \sigma(b) = a+b, a \neq b$ 则称 a 和 b 是亲和数(如果 $a=b$, 则 a 是完全数),例如 $\sigma(220) = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110+220=504$, $\sigma(284) = 1+2+4+71+142+284=504=220+284$, 220 和 284 是最小的亲和数对^[13]

费马^[1]找到另一个亲和数对 $17296=24 \times 23 \times 47$, $18416=24 \times 1151$ ^[13]文献[1]中介绍说,在耶鲁大学的 IBM 7094 计算机上,对所有 100 万以下的数进行了清查,结果找到 42 对亲和数^[13]这是大约 1967 年以前的事^[13]文献[6]中说,目前世界上只发现了 1200 对亲和数^[13]我们在 CAMPAQ 486 微机(主频 66)上用 TURBOC2.0 编程语言找到 90 亿以下的亲和数 1360 对,比文献[6]中提到的多 160 对^[13]

下面给出这 1360 对数的分布

1 亿以下: 236对;	1~5 亿: 209对;	5~10 亿: 139对;
10~20 亿: 169对;	20~30 亿: 136对;	30~40 亿: 111对;
40~50 亿: 91对;	50~60 亿: 85对;	60~90 亿: 184对 ^[13]

最小的 74 对(500 万以下)亲和数是

220 284;	1 184 1 210;	2 620 2 924;	5 020 5 564;
6 232 6 368;	10 744 10 856;	12 285 14 595;	17 296 18 416;
63 020 76 084;	66 928 66 992;	67 095 71 145;	69 615 87 633;
79 750 88 730;	100 485 124 155;	122 265 139 815;	122 368 1 231 522;
141 664 153 176;	142 310 168 730;	171 856 176 336;	176 272 180 848;
185 368 203 432;	196 724 202 444;	280 540 365 084;	308 620 389 924;
319 550 430 402;	356 408 399 952;	437 456 455 344;	469 028 486 178;
503 056 514 736;	522 405 525 915;	600 392 669 688;	609 928 686 072;
624 184 691 256;	635 624 712 216;	643 336 652 664;	667 964 783 556;

726 104 796 696;	802 725 863 835;	879 712 901 424;	898 216 980 984;
947 835 1 125 765;	998 104 1 043 096;	1077 890 1 099 390;	1 154 450 1 189 150;
1 156 870 1 292 570;	1 175 265 1 438 983;	1 185 376 1 286 744;	1 280 565 1 340 235;
1 328 470 1 483 850;	1 358 595 1 486 845;	1 392 368 1 464 592;	1 466 150, 1 747 930;
1 468 324 1 749 212;	1 511 930 1 598 470;	1 669 910 2 062 570;	1 798 875, 1 870 245;
2 082 464 2 090 656;	2 236 570 2 429 030;	2 652 728 2 941 672;	2 723 792 2 874 064;
2 728 726 3 077 354;	2 739 704 2 928 136;	2 802 416 2 947 216;	2 803 580 3 716 164;
3 276 856 3 721 544;	3 606 850 3 892 670;	3 786 904 4 300 136;	3 805 264 4 006 736;
4 238 984 4 314 616;	4 246 130 4 488 910;	4 259 750 4 445 050;	4 482 765 5 120 595;
4 532 710 6 135 962;	4 604 776 5 162 744;		

用手工算法不可能算出更多的亲和数,即使检验一对亲和数也不容易,例如检验上述最后一对,用检验 220 和 284 的方法来检验大数是很困难的。(13) 检验的方法是将其进行素数幂因子分解:(用 * 表示乘号)

$$4\ 604\ 776 = 8 * 121 * 67 * 71, \sigma(4\ 604\ 776) = \sigma(8) \sigma(121) \sigma(67) \sigma(71) = 15 * 133 * 68 * 72 = 9\ 767\ 520;$$

$$5\ 162\ 744 = 8 * 113 * 5\ 711, \sigma(5\ 162\ 744) = \sigma(8) \sigma(113) \sigma(5\ 711) = 15 * 114 * 5\ 712 = 9\ 767\ 520;$$

检验用到如下性质:如果 m 与 n 互素则 $\sigma(mn) = \sigma(m) \sigma(n)$; 如果 p 是素数,则 $\sigma(p^n) = 1 + p + \dots + p^n$ 。(13) 特别地,如果 $m = 2^n$,则 $\sigma(m) = 2m - 1$ 。(13)

在算出的亲和数对 a, b (设 $a < b$) 中, a 与 b 的奇偶性相同, $b/a < 1.433$ 。(13) 大多数 $b/a < 1.1$, $b/a > 1.33$ 的只有下列 10 对

319 550 = $2 * 25 * 7 * 11 * 83$,	430 402 = $2 * 7 * 71 * 433$;	$b/a = 1.346\ 9$
4 532 710 = $2 * 5 * 7 * 13 * 17 * 293$	6 135 962 = $2 * 7 * 71 * 6\ 173$;	$b/a = 1.354$
56 512 610 = $2 * 5 * 7 * 11 * 23 * 3\ 191$,	75 866 014 = $2 * 49 * 774\ 143$;	$b/a = 1.342\ 5$
227 443 340 = $4 * 5 * 17 * 43 * 47 * 331$,	302 651 764 = $4 * 1\ 187 * 63\ 743$;	$b/a = 1.331$
559 334 930 = $2 * 5 * 7 * 11 * 23 * 31\ 583$,	750 516 718 = $2 * 7 * 71 * 281 * 2\ 687$;	$b/a = 1.342$
938 304 290 = $2 * 5 * 7 * 11 * 17 * 43 * 1\ 667$,	1 344 480 478 = $2 * 11 * 31 * 197 * 10\ 007$;	$b/a = 1.432$
994 945 490 = $2 * 5 * 49 * 121 * 97 * 173$,	1 331 936 326 = $2 * 49 * 881 * 15\ 427$;	$b/a = 1.338\ 7$
1 585 667 930 = $2 * 5 * 49 * 11 * 37 * 7\ 951$,	2 134 722 982 = $2 * 7 * 83 * 227 * 8\ 093$	$b/a = 1.346\ 3$
1 689 026 570 = $2 * 5 * 49 * 11 * 41 * 7\ 643$,	2 263 716 406 = $2 * 49 * 1\ 567 * 14\ 741$;	$b/a = 1.340\ 2$
7 961 973 140 = $4 * 5 * 11 * 67 * 727 * 743$,	10 600 838 764 = $4 * 1637 * 1\ 618\ 943$;	$b/a = 1.331\ 4$

下面给出 85 亿到 90 亿之间的亲和数 28 对,奇数 11 对偶数 17 对

(1) 8 502 526 305 10 355 911 839;	8 508 405 465 8 663 076 135;	8 517 106 125 8 735 245 875;
8 521 860 555 9 326 392 245;	8 645 093 145 9 186 830 055;	8 717 951 385 9 407 501 415;
(7) 8 804 881 305 8 845 601 895;	8 902 642 875 9 023 629 125;	8 935 581 375 10 128 267 585;
8 952 142 815 11 265 457 185;	8 975 660 265 10 045 057 815;	
(12) 8 508 118 180 10 993 367 516;	8 534 619 752 9 650 022 808;	8 557 778 500 10 355 067 452;
8 575 844 056 9 040 528 424;	8 628 307 636 8 807 350 604;	8 651 076 434 9 742 585 006;
(18) 8 658 321 632 8 847 009 568;	8 676 652 328 9 066 365 272;	8 808 227 056 8 962 421 264;
8 834 761 364 9 633 895 276;	8 850 661 358 8 937 716 242;	8 894 283 788 9 131 961 652;
(24) 8 924 047 490 9 017 050 750;	8 960 679 970 9 096 591 710;	8 971 549 180 11 589 884 804;
8 990 384 916 9 338 010;	8 996 364 572 9 788 118 628;	

设,建立能减少寻租行为的选举制度,从而在决定政府官员上形成竞争性市场,并且切实加强民主监督¹⁹另一方面,要加快管理制度改革,如进出口许可证、配额、土地批租、股票发行等均应采取公开竞标,使这些潜在租金转化为政府收入¹⁹另外,对于特种行业的价格补贴、国家财政拨款、税收制度等均应提高透明度,有些不合理的政策和有利于特殊集团的法律、法规均应取消¹⁹如税收上不管是外资、内资均应一视同仁¹⁹这样,有利于租金的消失¹⁹

第五,对于寻租活动征收税金,加大对寻租者和腐败分子的惩罚力度,从而提高其寻租成本¹⁹如政府对政策所造成垄断地位而带来的纯租金征收税金,对行贿、受贿等行为加大处罚力度,从而使寻租者和思想立场不坚定者产生后顾之忧,从而减少寻租行为¹⁹

我们相信,随着市场经济体系的建立、健全,随着国家调控经济、管理经济水平的提高,随着各领域制度的不断完善,租金的形成必将越来越少,寻租行为、腐败现象将逐步消除¹⁹

参 考 文 献

1 龚金国·当代西方寻租理论述评·社会科学,1989,(6):51~54
2 樊钢·西方的寻租行为与灰市交易·经济社会体制比较,1989,(1):3~11
3 左建龙·西方寻租理论述评·国外社会科学,1989,(10)
4 王忠民·寻租:引致中国经济运行扭曲的诱因·经济研究参考资料,1989,(23):1~12
5 毕焦·从专制到民主——寻租社会由兴转衰的历史轨迹·经济社会体制比较,1989,(3)
6 樊钢·灰市场理论·经济研究,1988,(8)
7 李健·西方寻租理论探析·经济学家,1997,(4):88~92

(上接第 68 页)

参 考 文 献

1 Ore, Invitation To Number of Theory¹⁹中译本,有趣的数论¹⁹北京:北京大学出版社,1985
2 华罗庚¹⁹数论导引¹⁹北京:科学出版社,1979
3 王 元¹⁹谈谈素数¹⁹上海:上海教育出版社,1978
4 潘承洞¹⁹素数分布与哥德巴赫猜想¹⁹济南:山东科学技术出版社,1979
5 柯 召,孙 琦¹⁹初等数论 100 例¹⁹上海:上海教育出版社,1980
6 金 卓¹⁹找找你的另一个我¹⁹电脑,1995,(1)

Friendly Number

Zhou Shangchao Wang Seng Xu Baogen Deng Yixiong

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, we gave 184 friendly numbers¹⁹.

Key words number theory; friendly number; complete number