文章编号：1005-0523(1999)02-0075-05

# $K$ 阶非齐次 Poisson 过程

赖 宏 辛

(华东交通大学 经济管理学院，江西 南昌 330013)

**摘要**：探讨了 $K$ 阶非齐次 Poisson 过程的分布，研究了其等待时间的分布，以及等待时间的各阶矩之间的关系。

**关 键 词**：$K$ 阶非齐次 Poisson 过程；等待时间

**中图分类号**：O 211.6 **文献标识码**：A

## 0 引 言

Aki，Kuboki，和 Hirano[1]，Charalambides[2]，以及 Philippou[3]等对 $K$ 阶齐次 Poisson 过程及其分布进行过研究，但是，关于 $K$ 阶非齐次 Poisson 过程分布的研究，特别是其等待时间的分布以及性质的研究，尚未有人涉及。

本文对 $K$ 阶非齐次 Poisson 过程的分布进行了推导，并着重研究了其等待时间的分布，找出了等待时间分布的各阶矩之间的关系。

## 1 $K$ 阶非齐次 Poisson 过程

**定义 1** 设 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一个随机过程，$N(t)$ 是到时刻 $t$ 事件发生的次数，满足

(i) $N(0)=0$，

(ii) $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 有独立增量；

(iii) $P(N(t+h)-N(t)=j)=\lambda_j(t)h+0(h)$，$h\geqslant 0$，$\lambda_j(t)\geqslant 0$，$\lambda_j(t)$ 在 $[0,a]$ 上可积（$\forall a>0$），$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_j(t)=\infty$，$j=1,2,\cdots,k$，

(iv) $P(N(t+h)-N(t)\geqslant k+1)=0(h)$；

则称 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为一个 $k$ 阶非齐次 Poisson 过程，简记为 $N(t)\sim NHPK$；

为此后叙述方便，记 $P_n(t)=P(N(t)=n)$，$P_n(h_t)=P(N(t+h)-N(t)=n)$，$n=1,2,\cdots$；$g_i=g_i(t)=\sum\limits_{j=i}^{k}\lambda_j(t)$，$i=1,2,\cdots,k$；则由定义 1，

$$P_0(h)=1-\sum_{j=1}^{k}P_j(h_t)=1-g_1h+0(h) \tag{1}$$

$$P_0(0)=1,\ P_n(0)=0,\ n>0 \tag{2}$$

收稿日期：1998-07-16；

作者简介：赖宏辛(1955-)，男，江西石城人，华东交通大学讲师。

用 $G(s,h)$ 表示 $N(h)$ 的母函数,则

$$G(s,h)=1-g_1h+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)hS^j=1+\sum_{j=1}^{k}(S^j-1)\lambda_j(t)h \qquad |S|<1 \tag{3}$$

**定理 1** 如果一个随机过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$,$N(t)\sim NHPK$,而且,对任何 $a>0$, $\lambda_j(t)$ 在 $[0,a]$ 上可积,$j=1,2,\cdots,k$,则

$$P'_n(t)=-g_1P_n(t)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)P_{n-j}(t),\ n=0,1,\cdots, \tag{4}$$

$$P_0(t)=\exp\left\{-\int_0^t g_1(u)du\right\} \tag{5}$$

$$P_n(t)=\exp\left\{-\int_0^t g_1(u)du\right\}\cdot\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\lambda_j(u)e^{\int_0^u g_1(x)dx}P_{n-j}(u)du \tag{6}$$

$m=\min\{n,k\}$,在(6) 中 $n\geqslant 1$⒀

**证明** $P_n(t+h)=P(N(t+h)=n)$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(N(t+h)=n/N(t)=i)P(N(t)=i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(N(t+h)-N(t)=n-i/N(t)=i)P(N(t)=i)$$

因为 $N(t)$ 有独立增量,同时由定义 1,

$$P_n(t+h)=\sum_{i=0}^{\infty}P_{n-i}(h_t)P_i(t)$$

$$=\sum_{j=0}^{m}P_j(h_t)P_{n-j}(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}P_j(h_j)P_{n-j}(t)+P_n(t)(1-g_1h)+0(h)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}P_{n-j}(t)\lambda_j(t)h+P_n(t)(1-g_1h)+0(h)$$

其中 $m=\min\{n,k\}$

稍加整理,并令 $h\to 0$,得(4) 式⒀

(4) 式两端同乘 $e^{g_1t}$,然后从 0 到 $t$ 积分,得到(6) 式⒀同样的方法可以得到(5) 式⒀证毕⒀

**定理 2** 如果随机过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$,$N(t)\sim NHPK$,则

$$G(s,t)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}(S^j-1)\lambda_j(t)\right\} \tag{7}$$

其中 $G(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)S^n$ 是 $N(t)$ 的母函数,$|S|<1$⒀

**证明** 由(3) 式,同时因为 $N(t)$ 是独立增量的,

$$G(s,t+h)=ES^{N(t+h)}=ES^{N(t+h)-N(t)}S^{N(t)}$$

$$=G(s,h)G(s,t)=\left[1+\sum_{j=1}^{k}(S^j-1)\lambda_j(t)h\right]G(s,t)$$



令 $h\to 0$,由此式可得

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}=G(s,t)\sum_{j=1}^{k}(S^j-1)\lambda_j(t)$$

解方程得到(7)。证毕。

**定理 3** 如果随机过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$,$N(t)\sim NHPK$,则 $N(t)$ 的分布函数可以表示为

$$P_n(t)=e^{-g_1}\sum_{r_k=0}^{[n/k]}\sum_{r_{k-1}=0}^{[(n-kr_k)/k-1]}\cdots\sum_{r_2=0}^{[(n-kr_k-\cdots-3r_3)/2]}\frac{(\lambda_k(t))^{r_k}\cdots(\lambda_2(t))^{r_2}(\lambda_1(t))^{n-kr_k-\cdots-2r_2}}{r_k!\cdots r_2!(n-kr_k-\cdots-2r_2)!}\tag{8}$$

其中 $n=0,1,\cdots,[x]$表示小于或等于 $x$ 的最大整数。

考虑 $G(s,t)$ 的定义以及(7)式,可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)S^n=e^{-g_1}\prod_{j=1}^{k}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_j(t)S^j)^n}{n!}\right\}。$$

上式右端 $k$ 个级数相乘的结果是,所有脚标不是 $j$ 的倍数的 $S^n$ 的系数均为零。比较上式两端 $S^n$ 的系数可以得到(8)式。定理 3 的详细证明从略。

进一步让 $r_1=n-\sum_{j=1}^{k}jr_j$,则 $\sum_{j=2}^{k}jr_k=n$。于是(8)式又可以如下表示:

$$P_n(t)=e^{-g_1}\sum\frac{(\lambda_1(t))^{r_1}\cdots(\lambda_k(t))^{r_k}}{r_1!\cdots r_k!}\tag{9}$$

其中求和是对满足 $\sum_{j=1}^{k}jr_j=n$ 的 $r_1,\cdots,r_k$ 而进行的。

Charalambides 在[2]中用截尾的 Bell 多项式来表示上述类型的和式。下面用截尾的 Bell 多项式表示 $P_n(t)$,

$$P_n(t)=\frac{1}{n!}e^{-g_1}T_{n,k}(\lambda_1(t),2!\lambda_2(t),\cdots,m!\lambda_m(t))\tag{10}$$

$m=\min\{n,k\}$。

## 2　等待时间的分布

这部分讨论相应于 $N(t)$ 的等待时间的分布,及其各阶矩。

设 $W_n$ 是相应于 $N(t)$ 的等待时间。在[4],[5]中,Parzen 和 Ross 讨论过事件 $\{W_n<t\}$与 $\{N(t)\geqslant n\}$是等价的。设 $F_{W_n}(t)$ 为 $W_n$ 的分布函数,则

$$F_{W_n}(t)=P(W_n<t)=P(N(t)\geqslant n)=1-\sum_{j=0}^{n-1}P_j(t),$$

因此,$W_n$ 的密度函数为

$$f_{W_n}(t)=F'_{W_n}(t)=-\sum_{j=0}^{n-1}P'_j(t),\ n=1,2,\cdots\tag{11}$$

**定理 4** 如果 $W_n$ 是相应于 $N(t)$ 的等待时间,$N(t)\sim NHPK$,则

$$f_{W_n}(t)=\sum_{j=1}^{m}g_1P_{n-j}(t)$$

$$f_{W_n}(t)=e^{-g_1}\sum_{j=1}^{m}\frac{g_j}{(n-j)!}T_{n-j,k}(\lambda_1(t),2!\lambda_2(t),\cdots,r!\lambda_r(t))\tag{12}$$

$m=\min\{n,k\}$，$r=\min\{n-j,k\}$，$n=1,2,\ldots$。

**证明** 用归纳法。

首先，由定理 1 和(11)式

$$f_{W_1}(t)=-P'_0(t)=g_1P_0(t)$$

假设 $f_{W_n}(t)=\sum_{j=1}^{m}g_jP_{n-j}(t)$。如果 $n<k$，则 $m=n$，由定理 1，

$$f_{W_{n+1}}(t)=-\sum_{j=0}^{n}P'_j(t)=-P'_j(t)+f_{W_n}(t)$$

$$=-\left(-g_1P_n(t)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)P_{n-j}(t)\right)+\sum_{j=1}^{m}g_jP_{n-j}(t)=g_1P_n(t)+\sum_{j=1}^{m}g_{j+1}P_{n-j}(t)$$

令 $j+1=i$，则

$$f_{W_{n+1}}(t)=g_1P_n(t)+\sum_{i=2}^{m+1}g_{i+1}P_{n+1-i}(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{m+1}g_jP_{n+1-i}(t))=\sum_{j=1}^{m+1}g_iP_{n+1-j}(t)$$

如果 $n\geqslant k$，则 $m=k$，而且 $g_k-\lambda_k(t)=0$。因此

$$f_{W_{n+1}}(t)=g_1P_n(t)+\sum_{j=1}^{k}(g_j-\lambda_j(t))P_{n-j}(t))=g_1P_n(t)+\sum_{j=1}^{k-1}g_{j+1}P_{n-j}(t)$$

令 $j+1=i$，则

$$f_{W_{n+1}}(t)=g_1P_n(t)+\sum_{i=2}^{k}g_iP_{n+1-i}(t)=\sum_{i=1}^{k}g_iP_{n+1-i}(t)=\sum_{j=1}^{m}g_jP_{n+1-j}(t)$$。

再由(10)式

$$f_{W_n}(t)=e^{-g_1}\sum_{j=1}^{m}\frac{g_j}{(n-j)!}T_{n-j,k}(\lambda_1(t),2!\lambda_2(t),\cdots r!\lambda_r(t)),$$

其中 $m=\min\{n,k\}$，$r=\min\{n-j,k\}$，$n=1,2,\ldots$。证毕。

**定理 5** 如果 $W_n$ 是相应于 $N(t)$ 的等待时间，$N(t)\sim NHPK$；而且，定义 1 中的 $\lambda_j(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_j(t)=\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^i\lambda_j(t)}{e^{\lambda_j(t)}}=0\quad i\geqslant 0,j=1,2,\ldots,k$$。

则 $W_n$ 及 $W_{n-1}$ 的各阶矩之间有如下关系：

$$EW_n^i=i\int_0^{\infty}t^{i-1}P_{n-1}(t)\,dt+EW_{n-1}^i,\ i=1,2,\ldots,n=1,2,\ldots$$。

**证明** 由 $P_n(t)$ 的表达式及定理的条件，

$$\lim_{t\to\infty}t^iP_n(t)=0,i,n=1,2,\ldots$$。

由定理 1 及(11)式

$$EW_n^i=\int_0^{\infty}t^if_{W_n}(t)\,dt=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{\infty}t^iP'_j(t)\,dt$$

$$= -\int_0^\infty t^i P'_{n-1}(t)\,dt + EW_{n-1}^i = -\left[t^i P_{n-1}(t)\Big|_0^\infty - i\int_0^\infty t^{i-1} P_{n-1}(t)\,dt\right] + EW_{n-1}^i$$

$$= i\int_0^\infty t^{i-1} P_{n-1}(t)\,dt + EW_{n-1}^i \quad (13)$$

证明完毕(13)

## [参考文献]


[1] Aki, S., Kuboki, H. and Hirano, k., On Discrete Distributions of Order k[J], Ann. Inst. Statist, Math., 36(1984), 431~440

[2] Charalambides, CH.A., On Discrete Distributions of Order k[J], Ann., Inst. Statist, Math., 88(1986), 557~568

[3] Philippou, A.N., Multiparameter Distributions of Order k[J], Statist, Math., No 8, 467~475(1988)

[4] Emanuel Parzen, Stochastic Processes[M], Holden-Day, Inc., 1962

[5] Ross, Sheldon M., Stochastic Processes[M], John Wiley & Sons, Inc., 1983

[6] Karlin, Samuel, Taylor, H.M., A First Course in Stochastic Processes[M], 2nd Edition, Academic Press, Inc., 1975


# Nonhomogeneous Poisson Process of Order *K*


**LAI Hong-xing**

(Economic and Management College, East China Jiaotong Univ, Nanchang, Jiangxi, 330013, China)



**Abstract:** In this paper, the distributions of nonhomegeneous poisson process of order *K* are explored. The distributions and relationships between moments of the corresponding waiting time are investigated.



**Key words:** nonhomogeneous poisson process of order *K*; waiting time