文章编号:1005-0523(1999)01-0080-05

序Banach空间中一类序算子的若干性质

盛梅波

(1.华东交通大学 基础课部,江西 南昌　330013)

摘要:在由锥导出的半序Banach空间框架下,研究集值强增(减)算子的若干性质,所得结果是文[1,2]中相应结果的推广⒆

关　键　词:强增(减)算子;锥;Haussdorff距离;H－连续

中图分类号:O 177.91　　　　**文献标识码:**A

0 引　言

先给出序Banach空间中的集值强增(减)算子的概念,在半序框架下讨论这类集值序算子的一些性质⒀

设P是实Banach空间E中的锥,"$\leqslant$"是由P导出的半序,若P是一体锥,用int(P)表示P在E中全体内点⒀其它未加说明的概念、符号参见文[1,2,7]及其所附文献⒀

定义1　设E中非空子集A、B,如果$\forall x\in A$,$y\in B$,均有$x\leqslant y$成立,则称集A小于集B,记为$A\leqslant B$⒀

特别地,若$A=\{x\}$,$A\leqslant B$则为$x\leqslant B$;$B=\{y\}$,$A\leqslant B$则为$A\leqslant y$⒀

引理1　$A_n\xrightarrow{H}A(n\to\infty)\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}H(A_n,A)=0$,其中$H$表示$E$中的Hausdorff距离⒀

定理1　Banach空间E中锥P是正规的充分必要条件是E中任意有界集列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$,和集D,如果$A_n\leqslant B_n\leqslant C_n$,且有$A_n\xrightarrow{H}D$,$C_n\xrightarrow{H}D$,则$B_n\xrightarrow{H}D$⒀

证明　充分性可由文[1]P236定理1⒀3,易知成立,下证必要性⒀

设三个集列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$,和集D如定理假设,由P的正规性可知,$\forall a_n\in A_n$,$c_n\in C_n$,$d\in D$,对$\forall b_n\in B_n$有

$$\|b_n-d\|\leqslant\|b_n-a_n\|+\|a_n-d\|\leqslant M\|c_n-a_n\|+\|a_n-d\|$$
$$\leqslant(M+1)\|a_n-d\|+M\|c_n-d\|\leqslant(M+1)H(A_n,D)+MH(C_n,D)$$

其中M是P的正规常数⒀从而有

$$H(B_n,D)\leqslant(M+1)H(A_n,D)+MH(C_n,D)$$

又有$\lim\limits_{n\to\infty}H(A_n,D)=0$,$\lim H(C_n,D)=0$,因此有$\lim\limits_{n\to\infty}H(B_n,d)=0$,即$B_n\xrightarrow{H}D(n\to\infty)$

定义2　设D是E的非空子集,$T:D\to 2^E$是一集值算子,称T是D上的强增(减)算子,如果$\forall x,y\in D$,$x\leqslant y$蕴含$T(x)\leqslant T(y)$或$(T(x)\geqslant T(y))$⒀

收稿日期:1998-08-25;**修订日期:**1999-01-20

作者简介:盛梅波(1966－),男,江西波阳人,华东交通大学讲师⒀

定义 3　设 $T:P\to 2^P$ 是一集值算子

1) 称 T 是次线性的,如果 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,均有 $T(tx)\geqslant tT(x)$;

2) 称 T 是强次线性的,如果 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,均有 $T(tx)\geqslant t^{-1}T(x)$;

3) 称 T 是超线性的,如果 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,均有 $T(tx)\leqslant tT(x)$;

4) 称 T 是弱超线性的,如果 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,均有 $T(tx)\leqslant t^{-1}T(x)$⒀

注　设 $T:P\to 2^P$,则

1) T 是次线性的充要条件是 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, s>1$,均有 $T(sx)\leqslant sT(x)$;

2) T 是强次线性的充要条件是 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, s>1$,均有 $T(sx)\leqslant s^{-1}T(x)$;

3) T 是超线性的充要条件是 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, s>1$,均有 $T(sx)\geqslant sT(x)$;

4) T 是弱超线性的充要条件是 $\forall x\in P\setminus\{\theta\}, s>1$,均有 $T(sx)\geqslant s^{-1}T(x)$⒀

事实上,若 T 是次线性的,$\forall x\in P\setminus\{\theta\}, s>1$,,则 $\frac{1}{s}\in(0,1)$,$T(x)=T(\frac{1}{s}\cdot sx)\geqslant\frac{1}{s}T(sx)$,即 $T(sx)\leqslant sT(x)$⒀反之,$\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,$\frac{1}{t}>1$,有 $T(x)=T(\frac{1}{t}\cdot tx)\leqslant\frac{1}{t}T(tx)$,即 $T(tx)\geqslant tT(x)$,即而 T 是次线性的,故 1) 成立⒀

类似有 2)、3)、4) 均成立⒀

命题 1　设 $T:P\to 2^P$ 是一集值算子,则有

1) T 是强次线性的,那么 T 是次线性的;

2) T 是超线性的,那么 T 是弱超线性的⒀

事实上,若 T 是强次线性的,$\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,$T(tx)\geqslant\frac{1}{t}T(x)$,从而 $T(tx)\geqslant tT(x)$,从而 1) 成立⒀

类似有 2) 成立⒀

定理 2　设 $T:P\to 2^P$ 是强次线性集值强减算子,则 T^2 是超线性的强增算子⒀

证明　首先 T^2 是强增算子⒀ $\forall x,y\in P$ 且有 $x\leqslant y$,任取 $u\in T^2(x)$,$v\in T^2(y)$,则 $\exists\,\alpha\in T(x)$,$\beta\in T(y)$ 使 $u\in T(\alpha)$,$v\in T(P)$,由于 T 是强减算子,从而有 $T(x)\geqslant T(y)$,即 $\alpha\geqslant\beta$,因而 $T(\alpha)\leqslant T(\beta)$,即而 $u\leqslant v$,故 $T^2(x)\leqslant T^2(y)$,则 T^2 是强增的⒀

其次 T^2 是超线性的,$\forall x\in P\setminus\{\theta\}, t\in(0,1)$,由 T 是强次线性的,故 $T(tx)\geqslant t^{-1}T(x)$,于是

$$T^2(tx)=T(T(tx)\leqslant T[t^{-1}T(x)]\leqslant(t^{-1})^{-1}T[T(x)]=tT^2(x)$$

故 T^2 是超线性的⒀

例　设 $E=R^1$,$P=[0,+\infty)$ 是 E 中一锥,给定正数 $a>0$,算子 $T(x)=\frac{a(1+x)}{x^2}$:$\mathrm{int}(P)\to\mathrm{int}(P)$ 是一强次线性强减算子⒀

定义 4　设 E 是实 Banach 空间,$CB(E)$ 为 E 中有界非空子集,算子 $T:E\to CB(E)$,$x_0\in E$,称 T 在 x_0 处 H-连续,如果 $\lim\limits_{x_n\to x_0}H[T(x_n),T(x_0)]=0$⒀

如果 T 在 $X\subset E$ 的每一点都 H-连续,则 T 在 X 上 H-连续⒀

引理 2[4]　设 P 是 E 中体锥,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{int}(P)$,$x_0\in\mathrm{int}(P)$,若 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,那么存在 t_n, s_n,满足 $t_n>1>s_n>0$,$t_n\to 1$,$s_n\to 1(n\to\infty)$,使得

$$t_n x_n \geqslant x_0 \geqslant s_n x_n$$

定理 3 设 P 是 E 中正规体锥，$T:\mathrm{int}(P)\to CB(\mathrm{int}(P))$ 是次线性的强增算子，$x_0\in\mathrm{int}(P)$，那么 T 在 x_0 处 H－连续。

证明 任取点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{int}(P)$，$x_n\to x_0$，由引理 2 知存在 $t_n>1>s_n>0$，$t_n\to1$，$s_n\to1$，使 $t_n x_n\geqslant x_0\geqslant s_n x_n$，又 T 是强增的。因而 $T(t_n x_n)\geqslant T(x_0)\geqslant T(s_n x_n)$。由 T 的次线性及定义 3 的注知

$$T(s_n x_n)\geqslant s_n T(x_n),\quad T(t_n x_n)\leqslant t_n T(x_n)$$

即

$$\frac{1}{t_n}T(x_0)\leqslant T(x_n)\leqslant\frac{1}{s_n}T(x_n)。$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}H\left[\frac{1}{t_n}T(x_0),T(x_0)\right]=0,\quad \lim_{n\to\infty}H\left[\frac{1}{s_n}T(x_0),T(x_0)\right]=0。$$

由定理 1 得 $T(x_n)\xrightarrow{H}T(x_0)$，即 T 在 x_0 处 H－连续。

定理 4 设 $T:\mathrm{int}(P)\to2^{\mathrm{int}(P)}$，其中 P 是 E 中体锥，则下列结论成立。

(1) 若 T 是强减的，则 T 不能是超线性的；

(2) 若 T 是超线性的，则 T 不能是强减的。

证明 反证。设 T 是超线性强减算子。任取 $x_0\in\mathrm{int}(P)$，点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $x_n\to x_0$，由引理 2 知有 t_n，s_n，满足 $t_n>1>s_n>0$，$t_n\to1$，$s_n\to1$，使 $t_n x_n\geqslant x_0\geqslant s_n x_n$，因 T 强减算子，则 $T(t_n x_n)\leqslant T(x_0)\leqslant T(s_n x_n)$，又 T 的超线性，$T(t_n x_n)\geqslant t_n T(x_n)$，$T(s_n x_n)\leqslant s_n T(x_n)$，于是有 $t_n T(x_n)\leqslant T(t_n x_n)\leqslant T(x_0)\leqslant T(s_n x_n)\leqslant s_n T(x_n)$ 与 $t_n\to s_n$ 矛盾，故原定理成立。

定义 5 设 P 是 E 中锥，$T:P\to2^P$，$u_0>\theta$，称 T 是 P 上的 u_0－凹算子，如果：

(1) $\forall x>\theta$，都有 $\alpha=\alpha(x)>0$，$\beta=\beta(x)>0$，

使得

$$\alpha u_0\leqslant T(x)\leqslant\beta u_0 \tag{1}$$

(2) 对任何满足 $\alpha u_0\leqslant x\leqslant\beta u_0$ 的 $x\in P$，其中 $\alpha=\alpha(x)>0$，$\beta=\beta(x)>0$，以及 $0<t<1$，都有 $\eta=\eta(x,t)>0$ 存在，使得

$$T(tx)\geqslant(1+\eta)tT(x) \tag{2}$$

定义 6 设 P 是中锥，$T:P\to2^P$，$u_0>\theta$。

(1) 在定义 5 中把式(2) 换成

$$T(tx)\geqslant(1+\eta)t^{-1}T(x) \tag{3}$$

则称 T 是强 u_0－凹算子。

(2) 在定义 5 中把式(2) 换成

$$T(tx)\leqslant(1-\eta)tT(x)\qquad 0<\eta<1, \tag{4}$$

则称 T 是 u_0－凸算子。

(3) 在定义 5 中把式(2) 换成

$$T(tx)\leqslant(1-\eta)t^{-1}T(x)\qquad 0<\eta<1, \tag{5}$$

则称 T 是弱 u_0－凸算子。

命题 2 设 P 是 E 中锥，$T:P\to2^P$，$u_0>\theta$，$\forall x\in P\setminus\{\theta\}$，都有 $\alpha(x)$，$\beta(x)>0$，使 $\alpha u_0\leqslant T(x)\leqslant\beta u_0$，则

(1) T 是 u_0－凹的充要条件是对任何满足 $\alpha u_0\leqslant x\leqslant\beta u_0$ 的 $x\in P$，$s>1$，都有 $\eta=\eta(x,s)>0$ 存在，使

$$T(sx) \leqslant \frac{s}{1+\eta} T(x) \tag{6}$$

(2) T 是强 u_0 − 凹的充要条件是对任何满足 $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$ 的 $x \in P$, $s > 1$, 都有 $\eta = \eta(x, s) > 0$ 存在,使

$$T(sx) \leqslant \frac{1}{(1-\eta)s} T(x) \tag{7}$$

(3) T 是 u_0 − 凸的充要条件是对任何满足 $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$ 的 $x \in P$, $s > 1$, 都有 $1 > \eta = \eta(x, s) > 0$ 存在,使

$$T(sx) \geqslant \frac{1}{(1+\eta)} s T(x) \tag{8}$$

(4) T 是弱 u_0 − 凸的充要条件是对任何满足 $\alpha u_0 \leqslant \beta u_0$ 的 $x \in P$, $s > 1$, 都有 $1 > \eta = \eta(x, s) > 0$ 存在,使

$$T(sx) \geqslant \frac{1}{(1-\eta)s} T(x) \tag{9}$$

命题 3　设 P 是 E 中锥, $T: P \to 2^P$, $u_0 > \theta$,

(1) T 是强 u_0 − 凹的,则 T 是 u_0 − 凹的。

(2) T 是 u_0 − 凸的,则 T 是弱 u_0 − 凸的。

证明　类似于定义 3 注及命题 1 可得。

定理 5　设 P 是 E 中体锥, $T: \mathrm{int}(P) \to 2^{\mathrm{int}(P)}$, $u_0 > \theta$,则

(1) T 是 u_0 − 凹的,则 T 是次线性的;

(2) T 是强 u_0 − 凹的,则 T 是强次线性的;

(3) T 是 u_0 − 凸的,则 T 是超线性的;

(4) T 是弱 u_0 − 凸的,则 T 是弱超线性的。

注意到 $x \in \mathrm{int}(P)$, 有 $\alpha = \alpha(x) > 0$, $\beta = \beta(x) > 0$ 存在,使 $x - \alpha u_0 \in P$, $\beta u_0 - x \in P$, 从而 $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$, 又由定理 5 的条件及定义可知结论成立。

[参 考 文 献]

[1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社, 1985

[2] K Deimling. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berling. Springer-Verlag. 1985

[3] 孙经先. 增算子的不动点和广义不动点[J]. 数学学报, 1989, 32(4): 456～467

[4] 杜一宏. 一类非紧算子的不动点及其应用[J]. 数学学报, 1989, 32(5): 618～627

[5] LI Guo-zheng, DONG Xiang-nan. Fixed Point Theorems of Set-Valued Quasi-increasing Operator [M]. Advances in Applied Functional Analysis, 1993, 1: 126～132

[6] H H Schaefer. Topological Vector spaces[M]. New York. Springer-Verlag, 1980

[7] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆:重庆出版社, 1984

[8] 盛梅波, 董祥南. 关于非扩张映象的不动点[J]. 华东交通大学学报, 1993, (10) 4: 83～87

On Some Properties of a Class of Ordering Operator in Ordered Banach Spaces

SHENG Mei-bo

(Basic Courses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we give the concept of multi-valued strongly increasing(decreasing) operator in Banach spaces, and obtain some properties. These results in this paper generalize the dependent results of [1,2] in the case of set-valued.

Key words: strongly increasing(decreasing) operator; normal cone; Huasdorff metric; H-continuous