

文章编号:1005-0523(1999)04-0075-03

关于圈的整和数的一个注记

刘二根, 徐保根, 周尚超, 邓毅雄

(华东交通大学 基础课部, 江西 南昌 330013)

摘要: 证明了圈 C_n 是一个整和图当且仅当 $n \neq 4$, 它推广了文献[1]的结果并且解决了[1]中提出的问题¹⁹.

关键词: 整和图; 整和数; 圈

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

0 引言

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 文中符号及术语均同于文献[3] 和[4]¹⁹.

F. 哈拉里[2] 引进了整和图的概念, 一个有限子集 $S \subset \mathbb{Z}$ 的整和图 $G^+(S)$ 是指图 (V, E) , 其中 $V = S$ 且 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $u + v \in S$ ¹⁹.

定义 1 如果一个图 G 同构于图 $G^+(S)$, 则称 G 为整和图, 记为 $G \cong G^+(S)$ ¹⁹.

定义 2 对图 G , 若存在最小的非负整数 s , 使得 $G \cup sK_1$ 为整和图, 则称数 s 为图 G 的整和数, 记为 $\chi(G) = s$ ¹⁹.

显然, 一个图 G 为整和图当且仅当 $\chi(G) = 0$ ¹⁹.

对一般的图 G 来说, 要确定 $\chi(G)$ 非常困难, 文献[2] 证明了所有道路及匹配为整和图, 而文献[1] 也证明了 n 点圈 C_n 当 $n \neq 4$ 时有 $\chi(C_n) \leq 1$, 并且提出了如下问题:

问题 任意奇圈是否为整和图?

1 定理及证明

定理 对所有 $n \geq 3$, 有 $\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{当 } n = 4; \\ 0 & \text{当 } n \neq 4. \end{cases}$

证明 从文献[1, 2] 可知 $\chi(C_3) = 0$, $\chi(C_4) = 3$; 且有 $C_5 \cong G^+(2, 1, -2, 3, -1)$, $C_7 \cong G^+(1, 2, -5, 7, -3, 4, 3)$ ¹⁹.

下面我们分两种情况 $C_{2j+1}(j \geq 4)$ 及 $C_{2j}(j \geq 3)$ 证明这两类圈都是整和图¹⁹.

为了证明的方便, 我们用下面图 1, 2 分别记 $C_{2j+1}(j \geq 4)$ 及 $C_{2j}(j \geq 3)$ 的顶点¹⁹.

情况 1 当 $n = 2j + 1 (j \geq 4)$

收稿日期:1999-05-19;

基金项目:江西省自然科学基金资助项目(3000009702)

作者简介:刘二根(1965-),男,江西吉水人,华东交通大学讲师.

首先我们分别给出 C_9 和 C_{11} 的标号如下:

令 $u_0^4 = 2, u_1^4 = 5, u_k^4 = u_{k-2}^4 - u_{k-1}^4 (k = 2,$

$3, 4); v_1^4 = -5, v_2^4 = 7, v_k^4 = v_{k-2}^4 - v_{k-1}^4 (k = 3, 4)$ 19.

且 $u_0^5 = 3, u_1^5 = 8, u_k^5 = u_{k-2}^5 - u_{k-1}^5 (k = 2, 3, 4,$

$5); v_1^5 = -8, v_2^5 = 11, v_k^5 = v_{k-2}^5 - v_{k-1}^5, (k = 3, 4,$

$5)$ 19.

通过上面的标号很容易知道 C_9, C_{11} 为整和图 19.

当 $j \geq 6$ 时, 我们对 C_{2j+1} 标号如下, 令

$$u_0^j = u_0^{j-1} + u_0^{j-2} \quad (j \geq 6);$$

$$u_1^j = u_1^{j-1} + u_1^{j-2} \quad (j \geq 6);$$

$$v_1^j = v_1^{j-1} + v_1^{j-2} \quad (j \geq 6) \quad 19.$$

且

$$u_k^j = u_{k-2}^j - u_{k-1}^j \quad (k = 2, 3, \dots, j)$$

$$v_k^j = v_{k-2}^j - v_{k-1}^j \quad (k = 2, 3, \dots, j)$$

其中: $v_0^j = u_0^j$, 对所有 $j \geq 6$ 19.

从上面的标号方法能够验证 $C_{2j+1} (j \geq 4)$ 为整和图 19.

以上标号方法用图 3 说明如下:

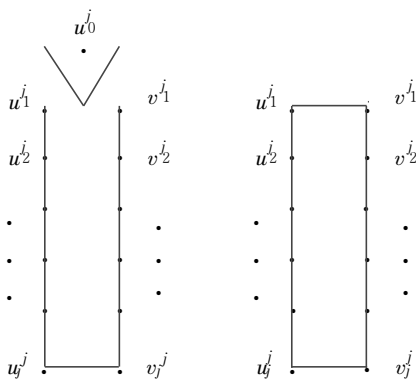


图1

图2

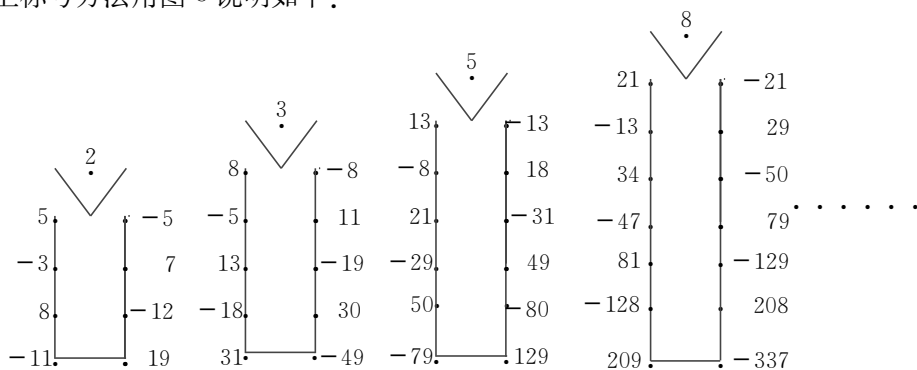


图3

情况 2 当 $n = 2j (j \geq 3)$:

首先, 我们分别给出 C_6 和 C_8 的标号如下:

令 $u_1^3 = 4, u_2^3 = -1, u_3^3 = 5; v_1^3 = 1, v_2^3 = 3, v_3^3 = -2$ 19.

且 $u_1^4 = 7, u_2^4 = -2, u_3^4 = 9, u_4^4 = -11; v_1^4 = 2, v_2^4 = 5, v_3^4 = -3, v_4^4 = 8$ 19.

通过上面的标号很容易看出 C_6 和 C_8 都是整和图 19.

当 $j \geq 5$ 时, 我们对 C_{2j} 标号如下:

$$\text{令 } u_1^j = u_1^{j-1} + u_1^{j-2} \quad (j \geq 5); u_2^j = u_2^{j-1} + u_2^{j-2} \quad (j \geq 5); v_1^j = v_1^{j-1} + v_1^{j-2} \quad (j \geq$$

$5),$

$$v_2^j = v_2^{j-1} + v_2^{j-2} \quad (j \geq 5)$$

且 $u_k^j = u_{k-2}^j - u_{k-1}^j \quad (k = 3, 4, \dots, j); v_k^j = v_{k-2}^j - v_{k-1}^j \quad (k = 3, 4, \dots, j)$ 19.

很容易看出 $C_{2j} (j \geq 3)$ 为整和图, 并且上面的标号方法用图 4 说明如下:

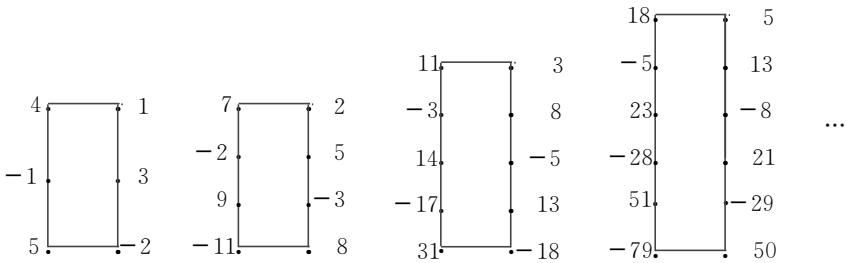


图4

[参 考 文 献]

[1] B XU¹⁹On integral sum graphs[J]¹⁹Discrete Math. 1999,(194):285~294¹⁹.
[2] F HARARY¹⁹Sum graphs over all the integres[J]¹⁹Discrete Math. 1994(124):99~105¹⁹.
[3] F HARARY¹⁹Graph Theory[M]¹⁹Addison Wesley· Reading MA. 1969¹⁹.
[4] 邓毅雄等¹⁹毛虫树的 $\int \Sigma$ 数[J]¹⁹华东交通大学学报,1999,16(3):74~77

A Note on Integral Sum Numbers of Cycles

LIU Er-gen, XU Bao-gen, ZHOU Shang-chao, DENG Yi-xiong

(Basic Courses Department, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: We prove that the n -cycle C_n is an integral sum graph if and only if $n \neq 4$. This generalizes a result of [1] and answers the question posed in [1].

Key words: integral sum graph; integral sum number; cycle