文章编号:1005-0523(1999)04-0078-06

不分明化近性空间(Ⅱ)

蒋志勇

(华东交通大学 基础课部,江西 南昌 330013)

摘要: 在(Ⅰ)的基础上讨论了不分明化近性拓扑空间结构与若干性质。此外,我们还定义了近性结构的粗细、初始近性与最终近性,并且讨论了不分明化近性积空间及其性质。

关 键 词: 近性拓扑; 初始近性; 近性积空间

中图分类号: O 159 **文献标识码:** A

1 不分明化近性拓扑

定义 1.1 设$(X,\mathcal{P})$是不分明化近性空间,对任何$A\in P(X)$,定义$A^-\in\mathcal{F}(X)$如下:

$$x\in A^-:=(\{x\},A)\in\mathcal{P}$$

引理 1.2 $\mathcal{P}$是X上的不分明化近性关系,对任意A、$B\subseteq X$,则$\models(C\subseteq A^-)\to(\neg(A,B)\in\mathcal{P}\to\neg(B,C)\in\mathcal{P})$

证明 设$[C\subseteq A^-]>\alpha$且$[\neg(A,B)\in\mathcal{P}]>\beta$ 其中 $\alpha,\beta\in[0,1)$

因为 $$\sup_{D\subseteq X}\min([\neg(A,D)\in\mathcal{P}],[\neg(B,D^C)\in\mathcal{P}])\geqslant[\neg(A,B)\in\mathcal{P}]>\beta$$

则存在$D\subseteq X$,使得$[\neg(A,D)\in\mathcal{P}]>\beta$且$[\neg(B,D^C)\in\mathcal{P}]>\beta$

$$[A^-\subseteq D^C]=\inf_{x\in D}(1-A(x))=\inf_{x\in D}(1-\mathcal{P}(\{x\};A))=\inf_{x\in D}[\neg(\{x\};A)\in\mathcal{P}]$$
$$\geqslant\inf_{x\in D}[\neg(A,\{x\})\in\mathcal{P}]\geqslant\beta$$

所以 $[C\subseteq D^C]\geqslant[C\subseteq A^-]\&[A^-\subseteq D^C]\geqslant\max(0,\alpha+\beta-1)\geqslant\alpha+\beta-1$

$$[\neg(B,C)\in\mathcal{P}]\geqslant[\neg(B,D^C)\in\mathcal{P}]\&[C\subseteq D^C]\geqslant\beta\&(\alpha+\beta-1)=\alpha+\beta-1$$

由α、β的任意性,得 $[\neg(B,C)\in\mathcal{P}]\geqslant[C\subseteq A^-]\&[\neg(A,B)\in\mathcal{P}]$

即 $$[\neg(A,B)\in\mathcal{P}\to\neg(B,C)\in\mathcal{P}]\geqslant[C\subseteq A^-]$$

定理 1.3 1) 对任意$A\subseteq X$,$\models A\subseteq A^-$

2) 对任意A、$B\subseteq X$,$\models B\equiv A^-\to B^-\equiv A^-$

3) 对任意A、$B\subseteq X$,$\models(A\cup B)^-\equiv A^-\cup B^-$

4) $\models\varnothing^-\equiv\varnothing$

所以,称A^-为A关于不分明化近性结构$\mathcal{P}$的不分明化闭包。

证明 1) $[A\subseteq A^-]=\inf_{x\in A}A^-(x)=\inf_{x\in A}[(\{x\},A)\in\mathcal{P}]\geqslant\inf_{x\in A}[(\{x\},\{x\})\in\mathcal{P}]=1$

收稿日期:1999-00-16;

作者简介:蒋志勇(1966-),男,江西南昌人,华东交通大学讲师

$$(2)\ [B \subseteq A] = \inf_{x\in A}\min(1, 1 - B^-(x) + A^-(x))$$
$$= \inf_{x\in X}\min(1, 1 - [\neg(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] + [\neg(\{x\}, B) \in \mathcal{P}])$$
$$\geqslant \inf_{x\in X}\min(1, [B \subseteq A^-]) = [B \subseteq A^-]$$

另一方面,$[A^- \subseteq B^-] = \inf_{x\in X}\min(1, 1 - [(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] + [(\{x\}, B) \in \mathcal{P}])$

对任意 $x \in X$, $[(\{x\}, B) \in \mathcal{P}] \geqslant [(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] < [A \subseteq B] \geqslant$

$$[(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] < [A \subseteq A^-] < [A^- \subseteq B] = [(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] < [A^- \subseteq B]$$

则 $[A^- \subseteq B^-] \geqslant \inf_{x\in X}\min(1, 1 - [(\{x\}, A) \in \mathcal{P}] + \min([(\{x\}, A) \in \mathcal{P}], [A^- \subseteq B]))$

$$\geqslant [A^- \subseteq B]$$

于是　$[A^- \equiv B^-] = [A^- \subseteq B^-] < [B^- \subseteq A^-] \geqslant [A^- \subseteq B] < [B \subseteq A^-] = [B \equiv A^-]$

3) 因为　$[A^- \subseteq (A \cup B)^-] = [B^- \subseteq (A \cup B)^-] = 1$,所以

$[(A^- \cup B^-) \subseteq (A \cup B)^-] = \inf_{x\in X}\min(1, 1 - \max(A^-(x), B^-(x)) + (A \cup B)^-(x)) = 1$

另

$[(A \cup B)^- \subseteq A^- \cup B^-] = \inf_{x\in X}\min(1, 1 - [(\{x\}, A \cup B) \in \mathcal{P}] + \max([(\{x\}, A) \in \mathcal{P}], [(\{x\}, B) \in \mathcal{P}])) = \inf_{x\in X}\min(1, 1 - \min([\neg(\{x\}, A) \in \mathcal{P}], [\neg(\{x\}, B) \in \mathcal{P}]) + [\neg(\{x\}, A \cup B) \in \mathcal{P}]) = 1$

所以　$[(A \cup B)^- \subseteq A^- \cup B^-] = 1$[13]

4) 显然[13]

推论1.4　若 $\mathcal{P}$ 是 X 上的不分明化近性关系,则对任何的 A、B、$C \subseteq X$,有

$$\models (C \equiv A^-) \rightarrow (\neg(A, B) \in \mathcal{P} \leftrightarrow \neg(B, C) \in \mathcal{P})$$[13]

仿照**定理1.3**,易得

定理1.5　设 $\mathcal{P}$ 是 X 上的不分明化近性关系,对 $A \in P(X)$, $A^\circ \in \mathcal{F}(X)$ 定义如下:

$$x \in A^\circ := \neg(\{x\}, A^c) \in \mathcal{P}$$

则　1) 对任意 $A \subseteq X$, $\models A^\circ \subseteq A$;

2) 对任意 A、$B \subseteq X$, $\models B \equiv A^\circ \rightarrow B^\circ \equiv A^\circ$;

3) 对任意 A、$B \subseteq X$, $\models (A \cap B)^\circ \equiv A^\circ \cap B^\circ$;

4) $\models X^\circ \subseteq X$[13]

因此,称 A° 为 A 关于不分明化近性关系 $\mathcal{P}$ 的不分明化内部[13]

下面我们就由**定义1.1**中 $A^- \in \mathcal{F}(X)$,来给出集合 X 上的一个不分明化拓扑[13]

定义1.6　设 X 是一个分明集合,对任何 $A \in P(X)$, $A^- \in \mathcal{F}(X)$ 如定义1.1所述,定义 $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(P(X))$ 如下: $A \in \mathcal{F} := A \equiv A^-$[13]

定理1.7　设 $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(P(X))$ 如上定义1.6所述,则

1) $\models \varnothing \in \mathcal{F}$

2) $\models (A \in \mathcal{F}) < (B \in \mathcal{F}) \rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,　A、$B \subseteq X$

3) 对任意 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \text{铿}\} \subseteq P(X)$, $\models (\forall \lambda)(\lambda \in \text{铿} \rightarrow A_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{F}) \rightarrow \bigcap_{\lambda \in \text{铿}} A_\lambda \in \mathcal{F}$

证明　1) $[\varnothing \in \mathcal{F}] = [\varnothing \equiv \varnothing^-] = 1$

2) $[A \cup B \in \mathcal{F}] = [(A \cup B)^- \equiv A \cup B] \geqslant [(A^- \equiv A) < (B^- \equiv B)] = [(A \in \mathcal{F})$

$\wedge (B \in \mathcal{F})]$

3) $[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{F}] = [(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^- = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda] = [(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^-) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda] \geqslant [\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^- \equiv \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda]$

$\geqslant \inf_{\lambda\in\Lambda}[A_\lambda^- \equiv A_\lambda] = [(\forall \lambda)(\lambda\in\Lambda \to A_\lambda \in \mathcal{F})]$

定义 1.8 设 X 是分明集，定义 $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(P(X))$ 如下：$A \in \mathcal{T}:= A^C \in \mathcal{F}$

由**定理 1.7** 知，$\mathcal{T}$ 为 X 上的一个不分明化拓扑，称由不分明化近性 $\mathcal{P}$ 诱导的拓扑，记为 $\mathcal{T}_\mathcal{P}$。

$$\mathcal{T}_\mathcal{P} = \int_{x\in A\subseteq X} \inf(1 - \mathcal{P}(\{x\}, A^C)) \backslash A$$

下面的定理反映的是任意集 X 上都存在一个近性结构 $\mathcal{P}$，而使得 $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ 是一个离散拓扑。

定理 1.9 设 X 为分明集，二元 F-谓词 $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(P(X) \times P(X))$ 定义为：$(A, B) \in \mathcal{P}:= \neg(A \cap B) = \varnothing)$，则 1) $\mathcal{P}$ 是 X 上的一个不分明化近性关系；

2) 对任何的 $A \in P(X)$，$\models A \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$。

定义 1.10 设 $\mathcal{P}_i(i = 1, 2)$ 是 X 上的不分明化近性关系，二元 F-谓词 $\subset$、$\equiv \mathcal{F}(\mathcal{F}(P(X) \times P(X)))$ 定义如下：

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 := (\forall A)(\forall B)(A \subseteq X) \wedge (B \subseteq X) \to ((A, B) \in \mathcal{P}_2 \to (A, B) \in \mathcal{P}_1))$$

$$\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2) \wedge (\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1)$$

定理 1.11 设 $\mathcal{P}_i(i = 1, 2, 3)$ 是 X 上的不分明化近性关系，则

1) $\models \mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_I$；

2) $\models (\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2) \wedge (\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1) \leftrightarrow \mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2$；

3) $\models (\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_2) \wedge (\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3) \to \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_3$。

定义 1.12 设 X 是分明集，$A \subseteq X$，集族 $\{F_i\}_{i\in I}$，称为 A 的一个有限划分，当 $\bigcup_{i\in I} F_i = A$，I 有限指标集。

引理 1.13 设 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$ 是 X 上的不分明化近性关系，N_A^1、N_A^2 分别为 $A \in P(X)$ 的 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$－不分明化近性邻域系，则 1) $\models \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \to N_A^1 \subseteq N_A^2$

特别地，当 $A = \{x\}$ 时，$\models \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \to N^1_{\{x\}} \subseteq N^2_{\{x\}}$

2) $\models \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \to \mathcal{T}_{\mathcal{P}_1} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}_2}$

证明 1) $[\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2] = \inf_{C、B\subseteq X} \min(1, 1 - \mathcal{P}_2(C, B) + \mathcal{P}_1(C, B))$

$[N_A^1 \subseteq N_A^2] = \inf_{D\subseteq X} \min(1, 1 - N_A^1(D) + N_A^2(D))$

$= \inf_{D\subseteq X} \min(1, 1 - [\neg(A, D^C) \in \mathcal{P}_1] + [\neg(A, D^C) \in \mathcal{P}_2])$

$= \inf_{D\subseteq X} \min(1, 1 - \mathcal{P}_2(A, D^C)] + \mathcal{P}_1(A, D^C))$

$= \inf_{C、B\triangleq\subseteq X} \min(1, 1 - \mathcal{P}_2(C, B)] + \mathcal{P}_1(C, B)) = [\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2]$

(2) 设 $[\mathcal{T}_{\mathcal{P}_1} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{P}_2}] = \inf_{B\subseteq X} \min(1, 1 - \mathcal{T}_{\mathcal{P}_1}(B) + \mathcal{T}_{\mathcal{P}_2}(B)) < \alpha \quad \alpha\in(0, 1]$，则存在 $B \subseteq X$，使得

$$1 - \mathcal{T}_{\mathcal{P}_1}(B) + \mathcal{T}_{\mathcal{P}_2}(B) = 1 - \inf_{X\in B}(1 - \mathcal{P}_1(\{x\}, B^C)) + \inf_{X\in B}(1 - \mathcal{P}_2(\{x\}, B^C)) < \alpha$$

即

$$\sup_{X\in B}(1 - N^1_{\{x\}}(B)) + \inf_{X\in B} N^2_{\{x\}}(B) < \alpha$$

存在 $x \in B$，使得

$$1 - N^1_{\{x\}}(B) + N^2_{\{x\}} < \alpha$$

从而

$$[\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2] \leqslant [N^1_{\{x\}} \subseteq N^2_{\{x\}}] < \alpha$$

由 α的任意性,我们即得证

2　不分明化近性乘积空间

定理 2.1　设 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是集合 X 上的不分明化近性族,二元 F-谓词 $P\in F(P(X)\times P(X))$ 定义 $(A,B)\in P:=(\forall\{A_j\}_{j\in I_m})(\forall\{B_k\}_{k\in I_n})((A=\bigcup_{j\in I_m}A_j)\wedge(B=\bigcup_{K\in I_n}B_k)\to(\exists j)(\exists k)((j\in I_m)\wedge(K\in I_n)\to(\forall i)(i\in I\to(A_j,B_k)\in P_i)))$

其中:$I_m=\{1,2,\cdots,m\}$, $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$,

则　1) P 是 X 上的不分明化近性关系;

2) $\models(\forall i)(i\in I\to P_i\wedge P)$

3) 若 P' 是 X 是不分明化近性关系,则　$\models(\forall i)(i\in I\to P_i\wedge P')\to P\wedge P'$

4) $\models T_P\equiv\bigcup_{i\in I}T_{P_i}$

证明　以下证明 1) 和 2)

1) P 满足$(P1)\sim(P5)$ 是显然的,现证 P 还满足$(P6)$

设　$[\neg(A,B)\in P]=1-P(A,B)=\sup_{\substack{\bigcup_{j\in I_m}A_j=A\\ \bigcup_{K\in I_n}B_k=A}}\ \inf_{\substack{j\in I_m\\ K\in I_n}}\ \sup_{i\in I}(1-P_i(A_j,B_k))>\alpha$

其中:$\alpha\in[0,1)$

则存在 $\{A_j|j\in I_m\}\subseteq P(X)$, $\{B_k|k\in I_n\}\subseteq P(X)$, $\bigcup_{j\in I_m}A_j=A$, $\bigcup_{k\in I_n}B_k=B$,对任意的$j\in I_m$, $K\in I_n$, 存在$i(j,k)\in I$,使得　$1-P_{i(j,k)}(A_j,B_k)>\alpha$

存在 $C_{jk}\subseteq X$,使　$\min(1-P_{i(j,k)}(A_j,C_{j,k}),1-P_{i,(j,k)}(B_k,C_{jk}^c))>\alpha$

从而 $[\neg(A_j,C_{jk}\in P]\geqslant\sup_{i\in I}(1-P_i(A_j,C_{jk}))\geqslant1-P_{i(j,k)}(A_j,C_{jk})>\alpha$

$[\neg(B_k,C_{jk}^C\in P]\geqslant\sup_{i\in I}(1-P_i(B_k,C_{jk}^C))\geqslant1-P_{i(j,k)}(B_k,C_{jk}^C)>\alpha$

因为　$[\neg A_j,\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]\geqslant[\neg(\bigcup_{k\in I_n}C_{jk},A_j)\in P]\geqslant\inf_{k\in I_n}[\neg(C_{jk},A_j)\in P)]\geqslant\alpha$

所以　$[\neg(A_j,\bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]\geqslant[\neg(A_j,\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]\geqslant\alpha$

$[\neg(A,\bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]=[\neg(\bigcup_{j\in I_n}A_j\ \bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]\geqslant\inf_{j\in I_m}[\neg(A_j,\bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\in P]\geqslant\alpha$

又类似可得 $[\neg(B,(\bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk})^c\in P\geqslant\alpha$,令 $C'=\bigcap_{j\in I_m}\bigcup_{k\in I_n}C_{jk}\subseteq X$,则$[\neg(A,C')\in P]\wedge[\neg(B,(C')^c\in P]\geqslant\alpha$

于是 $\sup_{C\subseteq X}\min([\neg(A,B)\in P],[\neg(B,C)^c\in P]\geqslant\alpha$

由 α的任意性,我们就可得

$$[\neg(A,B)\in P]\leqslant\sup_{C\subseteq X}\min[\neg(A,C)\in P],[\neg(B,C^C)\in P])$$

2) 对任意的 $i\in I$, $[P_i\wedge P]=\inf_{A、B\subseteq X}\min(1-P(A,B)+P_i(A,B))$

对 $A、B\subseteq X$,

$$P(A,B)=\inf_{\substack{\bigcup_{j\in I_m}A_j=A\\ \bigcup_{K\in I_n}B_k=A}}\ \sup_{\substack{j\in I_m\\ K\in I_n}}\ \inf_{i\in I}P_i(A_j,B_k)\leqslant\inf_{i'\in I}P_{i'}(A,B)\leqslant P_i(A,B)$$

故 $[(\forall i)(i \in I \to \mathcal{P}_i < \mathcal{P})] = 1$⒀

该定理中所定义的 $\mathcal{P}$ 称为 X 上关于不分明化近性关系族 $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in I}$ 的初始近性关系⒀类似地，有下面的

定理 2.2 设 $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in I}$ 是 X 上的一族不分明化近性结构，对任意 A、$B \subseteq X$，定义

$(A, B) \in \mathcal{P}: = (\exists \{A_j\}_{j\in I_m})(\exists \{B_k\}_{k\in I_n})((\bigcup_{j\in I_n} A_j = A) < (\bigcup_{k\in I_n} B_k = B) \to (\forall j)(\forall k)\left[(j \in I_m) < (k \in I_n) \to (\exists i \in I)((A_j, B_k) \in \mathcal{P}_i))\right]$

则 1) $\mathcal{P}$ 是 X 上的不分明化近性关系；

2) $\models (\forall i)(i \in I \to \mathcal{P} < \mathcal{P}_i)$；

3) 若 $\mathcal{P}'$ 是 X 上的任一不分明化近性关系，有 $\models (\forall i)(i \in I \to \mathcal{P}' < \mathcal{P}_i) \to \mathcal{P}' < \mathcal{P}$;

4) $\models \mathcal{T}_{\mathcal{P}} \equiv \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_{\mathcal{P}_i}$⒀

称本定理中所定义的 $\mathcal{P}$ 为 X 上关于不分明化近性关系 $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in I}$ 的最终近性关系⒀

定义 2.3 设 $(Y, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间，X 为分明集，$f: X \to Y$ 的映射，$f^{-1}(\mathcal{P}) \in \mathcal{F}(P(X) \times P(X))$ 定义为：$(A, B) \in f^{-1}(\mathcal{P}): = (f(A), f(B)) \in \mathcal{P}$，$A$、$B \in P(X)$⒀

定理 2.4 1) 上述定义的 $f^{-1}(\mathcal{P})$ 是 X 上的不分明化近性关系；

2) 若 $f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \in \mathcal{F}(P(X))$ 定义为

$V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}): = (\exists U)(U \subseteq Y) < (U \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}) < (f^{-1}(U) \subseteq V))$

设 f 为满射，则 $\models f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \equiv \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})}$；

3) 设 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$ 是 Y 上任意两个不分明化近性关系，则有 $\models \mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 \to f^{-1}(\mathcal{P}_1) < f^{-1}(\mathcal{P}_2)$⒀

证明 1) 容易验证 $f^{-1}(\mathcal{P})$ 满足 $(P1) \sim (P6)$⒀

2) 往证对任意的 $V \subseteq X$，$[V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})] = [V \in \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})}]$，事实上，设 $[V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})] = \sup_{\substack{U\subseteq Y \\ f^{-1}(U)\subseteq V}} \inf_{y\in U} [\neg(\{y\}, V^C) \in \mathcal{P}] > \alpha$，其中 $\alpha \in [0, 1)$⒀

则存在 $U \subseteq Y$，$f^{-1}(U) \subseteq V$，对任意的 $y \in U$，$[\neg(\{y\}, U^C) \in \mathcal{P}] > \alpha$⒀

因为 $f^{-1}(U) \subseteq X$，$V^C \subseteq (f^{-1}(U))^C \subseteq f^{-1}(U^C)$，则 $f(V^C) \subseteq U^C$，

所以 $[V \in \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})}] = \inf_{x\in V} [\neg(\{x\}, V^C) \in f^{-1}(\mathcal{P})] = \inf_{x\in V} [\neg(\{f(x)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}]$

$\geqslant \inf_{f(x)\in f(V)} [\neg(\{f(x)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] = \inf_{f(x)\in f(V)-U} [\neg(\{f(x)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] <$

$\inf_{f(x)\in U} [\neg(\{f(x)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] \geqslant \inf_{f(x)\in U} [\neg(\{f(x)\}, U^C \in \mathcal{P}] \geqslant \alpha$

根据 α 的任意性，可得 $[V \in \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})} \geqslant [V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})]$⒀

另一方面，对任意的 $V \subseteq X$，$[V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) = \sup_{\substack{U\subseteq Y \\ f^{-1}(U)\subseteq V}} [U \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}] \geqslant [(Y - f(V^C)) \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}]$

$= \inf_{y\in Y-f(V^C)} [\neg(\{y\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}]$

对任何 $y \in Y - f(V^C)$，由 $f: X \to Y$ 是满射，易知：存在 $x \in V$，使得 $f(x) = y$，从而

$[\neg(\{y\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] = [\neg(\{f(x)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] \geqslant \inf_{z\in V} [\neg(\{f(z)\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}]$

$= \inf_{z\in V} [\neg(\{z\}, V^C) \in f^{-1}(\mathcal{P})] = [V \in \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})}]$，

于是有 $[V \in f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}})] \geqslant \inf_{y\in Y-f(V^C)} [\neg(\{y\}, f(V^C)) \in \mathcal{P}] \geqslant [V \in \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{P})}]$

综上所得　　$[V\in f^{-1}(\mathcal{T}_P)] = [V\in \mathcal{T}_{f^{-1}(P)}]$

3) 直接由定义 1.10 与 2.3 可以得证。

推论 2.5　设 $\{(X_i, P_i)\}_{i\in I}$ 为一族不分明化近性空间,X 是分明集,$X=\prod_{i\in I}X_i$,对任何 $i\in I$,$p_i:X\to X_i$ 表示投射,二元 F-谓词 $P\in \mathcal{F}(P(X)\times P(X))$ 定义

$$(A,B)\in P := (\forall \{A_j\}_{j\in I_m})(\forall \{B_k\}_{k\in I_n})((\bigcup_{j\in I_m}A_j=A)\wedge(\bigcup_{k\in I_n}B_k=B)\to$$
$$(\exists j)(\exists k)((j\in I_m)\wedge(k\in I_n)\to(\forall i)(i\in I\to(A_j,B_k)\in p_i^{-1}(P_i))))$$

即 P 为 X 上关于不分明化近性关系族 $\{p_i^{-1}(P_i)\}_{i\in I}$ 的初始连续性关系。则 $\models \mathcal{T}_P \equiv \bigcup_{i\in I}p_i^{-1}(\mathcal{T}_{P_i})$。

[参考文献]

[1] MING SHENG YING. A new approach for fuzzy topology(Ⅰ)[J], F.S.S. 1991(39), 303~321.

[2] KATSARAS A K. Fuzzy Proximity Spaces[J]. **J. Math Anal Appl** 1979(68), 100~110.

[3] WANG JING LIU. Fuzzy proximity Spaces Redefined[J], **F.S.S** 1985(15), 241~248.

[4] 蒋志勇,赖国治.不分明化近性空间(Ⅰ)[J].华东交通大学学报,1999(3):68~73.

Fuzzifying Proximity Spaces(Ⅱ)

JIANG Zhi-yong

(Basic Courses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we have investigated the topology induced by fuzzifying proximity on X and some of their properties. In addition, we defined the coarse、fine、initial and final proximities and discussed the fuzzifying proximity product spaces and their properties.

Key words: proximity topology; initial proximity; proximity product space