

文章编号: 1005-0523(2000) 02-0040-06

几种载荷下的梁绝对值最大挠度的同一性

喻 晓 今

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 对数种载荷作用下梁的最大挠度进行了分析论证^[1]。所述挠度相互之间并无明显规律, 但建立同一形式的比拟梁后, 验证了梁绝对值最大挠度与相应载荷作用于比拟梁时产生的绝对值最大挠度大小相等, 从而使各种载荷作用所引起的特征挠度借助于比拟梁而有了同一性^[1]。由此得几种梁轴线相对最大偏移计算的一种全新方法^[1]。

关 键 词: 挠度; 弯曲; 梁; 比拟

中图分类号: TB301 **文献标识码:** A

0 引 言

梁弯曲挠度的求解一般遵循以下步骤: 1) 由几何变形关系推出横截面任一点的应变表达式; 2) 由物理性质关系一并考虑前式可得应力与曲率半径的关系; 3) 由截面静力关系联系应力与弯矩; 经以上三方面综合, 可得曲率半径与弯矩、抗弯曲刚度的表达式; 4) 根据曲率半径与曲率的关系, 将曲率表达为直角坐标下的函数关系; 5) 忽略高阶微量, 列出梁的挠曲线近似微分方程(弹性曲线方程); 6) 对微分方程积分 2 次, 便可得到挠曲线方程^[1]。

一般载荷梁的挠曲线方程写为以梁轴线作为自变量的函数^[1]。梁的极值挠度则可由先对自变量求一阶导数, 并令其为 0, 求出此函数的驻点坐标, 再代回到函数表达式中获得^[1]。

本文特设一比拟梁, 将其与被比拟的原梁部分进行比较, 以寻找它们的绝对值最大挠度之间的特定关系^[1]。

1 几种载荷下梁绝对值最大挠度的比拟

这里将几种载荷作用下梁的绝对值最大挠度与一特定悬臂梁的绝对值最大挠度进行比照^[1]。若这一特定悬臂梁的轴线与原梁的轴线平行放置的话, 则悬臂梁的固定端固结于原梁的绝对值最大挠度处, 此处原梁的转角恰好为 0, 这样定位, 并取原梁的一侧杆长作为悬臂梁的杆长, 原梁此侧的全部载荷、支反力加于悬臂梁上(原梁最大挠度处的载荷不加), 如此所得新梁权称“比拟梁”, 遂将比拟梁的绝对值最大挠度与原梁的绝对值最大挠度进行对照, 有以下证明(自然, 比拟梁的抗弯刚度亦取原梁值)^[1]。

1.1 简支梁跨正中作用一集中力

文[1]中给出了简支梁跨中一集中力作用所产生的挠曲线方程

收稿日期: 1999-12-01; 修订日期: 2000-03-06

作者简介: 喻晓今(1959—), 男, 江西南昌人, 华东交通大学副教授^[1]。

$$w = \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

其中:绝对值最大挠度

$$w_{\max} = w_c = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad x = \frac{l}{2}$$

梁 A、B 支承处的支反力

$$R_A = \frac{P}{2}(\uparrow), \quad R_B = \frac{P}{2}(\uparrow) \quad (13)$$

另由文[1]中得出杆长为 L 的与比拟梁同向悬臂梁的绝对值最大挠度

$$f_B = -\frac{R_B L^3}{3EI}.$$

将比拟梁的载荷 $R_B = \frac{P}{2}$, 杆长 $L = \frac{l}{2}$ 和抗弯刚度代入上式, 即可得比拟梁的绝对值最大挠度

$$v_{\max} = -\left(\frac{P}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 \frac{1}{3EI} = -\frac{Pl^3}{48EI}.$$

由此可见原梁与其比拟梁的绝对值最大挠度的关系为

$$w_{\max} = -v_{\max}. \quad (1)$$

1.2 简支梁跨中任意位置作用一集中力

文[1]中对此梁(如图1)所产生的挠曲线方程给出如

$$w = \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - x^2 - b^2), \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$w = \frac{Pb}{6EIl} \left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right], \quad a \leq x \leq l \quad (13)$$

其中:绝对值最大挠度

$$w_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9 \cdot 3EI}, \quad \text{设 } a > b, x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \text{ 处} \quad (13)$$

梁 A、B 支承处的支反力

$$R_A = \frac{b}{l}P(\uparrow), \quad R_B = \frac{a}{l}P(\uparrow)$$

此梁的比拟梁如图1, 梁长

$$L = l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

利用叠加原理, 杆长为 L 的同向悬臂梁的绝对值最大挠度为(见文[1])

$$f_B = f_B(R_B) + f_B(P);$$

$$f_B = -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{P}{3EI}(L-b)^3 + \frac{P}{2EI}(L-b)^2 b \quad (13)$$

将 R_B 、 L 等参数代入上式, 得该比拟梁的绝对值最大挠度

$$v_{\max} = -\frac{Pa}{3EI} \left[l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right]^3 + \frac{P}{3EI} \left[a - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right]^3 + \frac{P}{2EI} \left[a - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right]^2 \cdot b$$

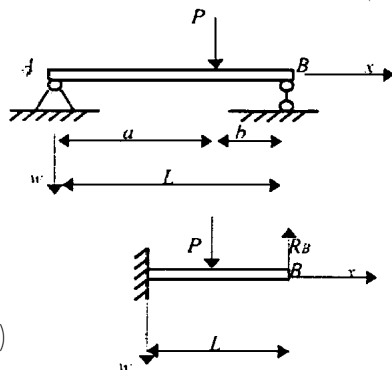


图1

$$v_{\max} = -\frac{P}{EI} \left[\frac{a}{3} \left(l - \frac{l^2 - b^2}{3} \right)^3 - \frac{l}{3} \left(a - \frac{l^2 - b^2}{3} \right)^3 - \frac{l}{2} \left(a - \frac{l^2 - b^2}{3} \right)^2 \cdot b \right];$$

$$v_{\max} = -\frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9 \frac{3}{3} EI}.$$

将 $v_{\max}$ 与 $w_{\max}$ 对比可知

$$w_{\max} = -v_{\max}. \quad (2)$$

1.3 简支梁右端支承处作用一集中力偶

文[2]中列出了在右端集中力偶作用下简支梁(如图2)的挠曲线方程

$$w = \frac{m_B \cdot x}{6EI} (l^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq l$$

其中绝对值最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{m_B l^2}{9 \frac{3}{3} EI}, \quad x = -\frac{l}{3} \text{ 处}$$

梁 A、B 支承处的支反力

$$R_A = \frac{m_B}{l} (\uparrow), \quad R_B = \frac{m_B}{l} (\downarrow)$$

此梁的比拟梁如图2示⁽¹³⁾由文[2]所给的与比拟梁同向的悬臂梁(自由端作用一集中力偶)的绝对值最大挠度

$$f_B(m_B) = -\frac{m_B L^2}{2EI}$$

杆长为 L 、自由端由集中力作用的悬臂梁的绝对值最大挠度

$$f_B(R_B) = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

其中:皆有 $L = \frac{3 - \frac{3}{3}}{3} l^{(13)}$

依叠加原理, m_B 与 R_B 共同作用所产生的绝对值最大挠度

$$f_B = f_B(m_B) + f_B(R_B) \quad (13)$$

将 R_B 、 L 、 EI 的具体值代入上式, 得到比拟梁的绝对值最大挠度

$$v_{\max} = -\frac{m_B \left(\frac{3 - \frac{3}{3}}{3} l \right)^2}{2EI} + \frac{m_B \left(\frac{3 - \frac{3}{3}}{3} l \right)^3}{3EI};$$

$$v_{\max} = -\frac{m_B l^2}{9 \frac{3}{3} EI} \quad (13)$$

因此可知

$$w_{\max} = -v_{\max}. \quad (3)$$

1.4 简支梁跨中间任意位置作用一集中力偶

此梁(如图3)的挠曲线方程由文[3]中给出如下

$$w_1 = -\frac{mx}{6EI} (l^2 - 3b^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$w_2 = \frac{m(l-x)}{6EI} [l^2 - 3a^2 - (l-x)^2], \quad a \leq x \leq l^{(13)}$$

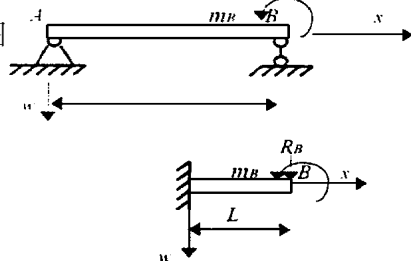


图 2

其中绝对值最大挠度为

$$w_{\max} = -\frac{m(l^2 - 3b^2)^{3/2}}{9 \frac{3}{2} EI l}, \quad x = \frac{l^2 - 3a^2}{3} \text{ 处, 设 } a > b \quad (13)$$

梁 A、B 支承处的支反力

$$R_A = \frac{m}{l} (\downarrow), \quad R_B = \frac{m}{l} (\uparrow)$$

此梁的比拟梁如图 3, 其梁长

$$L = l - \frac{l^2 - 3a^2}{3}$$

同前理, 按叠加原理求出比拟梁的绝对值最大挠度

$$f_B = f_B(R_B) + f_B(m);$$

$$f_B = -\frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{m(L-b)^2}{2EI} + \frac{m(L-b)}{EI} b.$$

将 R_B 、 L 等代入上式, 即得比拟梁的绝对值最大挠度

$$v_{\max} = -\frac{m}{3EI l} \left[l - \frac{l^2 - 3a^2}{3} \right]^3 + \frac{m}{2EI} \left[a - \frac{l^2 - 3a^2}{3} \right]^2 + \frac{m}{EI} \left[a - \frac{l^2 - 3a^2}{3} \right] b;$$

$$v_{\max} = \frac{m}{6EI l} \left\{ 3 \left[(l-b)^2 - b^2 + 2(l-b)b - 2 \left(\frac{l^2}{3} - b^2 \right) \right] l - l^3 + 2 \left(\frac{l^2}{3} - b^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\};$$

$$v_{\max} = \frac{m}{6EI l} \frac{2(l^2 - 3b^2)^{3/2}}{3^{3/2}};$$

$$v_{\max} = \frac{m(l^2 - 3b^2)^{3/2}}{9 \frac{3}{2} EI l} \quad (13)$$

显然

$$w_{\max} = -v_{\max} \quad (4)$$

1.5 简支梁作用一均布载荷

文[2]中给出了均布载荷作用下简支梁的挠曲线方程

$$w = \frac{qx}{24EI} (l^3 - 2lx + x^3), \quad 0 \leq x \leq l.$$

其中: 绝对值最大挠度

$$w_{\max} = w_c = \frac{5ql^4}{384EI};$$

梁 A、B 支承处的支反力

$$R_A = \frac{ql}{2} (\uparrow), \quad R_B = \frac{ql}{2} (\uparrow).$$

由文[2]中给出的杆长为 L 的悬臂梁在 q 作用下的绝对值最大挠度

$$f_B(q) = \frac{qL^4}{8EI}.$$

而杆长为 L 的悬臂梁在 R_B 作用下的绝对值最大挠度

$$f_B(R_B) = -\frac{R_B L^3}{3EI}$$

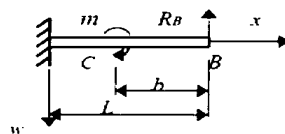
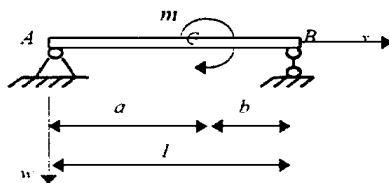


图 3

其中:皆有 $L = \frac{l}{2}$ (13)

根据叠加原理, q 与 R_B 共同作用产生的绝对值最大挠度

$$f_B = f_B(q) + f_B(R_B)$$

将 R_B 、 L 换为原梁对应的具体数据, EI 不变, 代入上式, 可得比拟梁的绝对值最大挠度

$$v_{\max} = \frac{q \left(\frac{l}{2} \right)^4}{8EI} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} \right)^3}{3EI}; \quad v_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

又得原梁与其比拟梁的绝对值最大挠度的关系

$$w_{\max} = -v_{\max} \quad (5)$$

1.6 一端外伸梁的外伸部作用一均布载荷

此梁如图 4 所示^[13]文[3]中给出其挠曲线方程如下

$$w_1 = -\frac{qa^2x}{12EI}(l^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$w_2 = \frac{q(x-l)}{24EI} [2a^2(3x-l) + (x-l)^2(x-l-4a)], \quad l \leq x \leq l+a.$$

其中两段的最大挠度分别为

$$w_{\max,1} = -\frac{ql^2a^2}{18 \cdot \frac{3EI}{3}}, \quad x = \frac{l}{3} \text{ 处}$$

$$w_{\max,2} = \frac{qa^3}{24EI}(3a+4l), \text{ 于自由端处此梁 } A、B \text{ 支承处支反力为}$$

$$R_A = \frac{qa^2}{2l} (\downarrow), \quad R_B = qa \left(1 + \frac{a}{2l} \right) (\uparrow)$$

该梁比拟梁如图 4^[13]其梁长为: $L = l - \frac{l}{3} + a$

同理, 按叠加原理求出拟梁的绝对值最大挠度

$$f_c = f_c(R_B) + f_c(q);$$

$$f_c = -\frac{R_B L_1^3}{3EI} - \frac{R_B L_1^2}{2EI} a + \frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL_1^4}{8EI} - \frac{qL_1^3}{6EI} a \quad (13)$$

其中: $L_1 = l - \frac{l}{3} = L - a$ (13)

将 R_B 、 L 、 L_1 代入 f_c 式, 得比拟梁的绝对值最大挠度

$$\begin{aligned} v_{\max} = & -\frac{qa}{3EI} \left(1 + \frac{a}{2l} \right) \left(l - \frac{l}{3} \right)^3 - \frac{qa}{2EI} \left(l - \frac{l}{3} \right)^2 \left(1 + \frac{a}{2l} \right) \cdot a + \frac{q}{8EI} \left(l - \frac{l}{3} + a \right)^4 - \\ & \frac{q}{8EI} \left(l - \frac{l}{3} \right)^4 - \frac{q}{6EI} \left(l - \frac{l}{3} \right)^3 a \\ v_{\max} = & \frac{ql^2a^2}{18 \cdot \frac{3EI}{3}} + \frac{qa^3}{24EI} (3a+4l) \end{aligned}$$

显见下式成立

$$|w_{\max,1}| + |w_{\max,2}| = |v_{\max}| \quad (6)$$

同理可推导一端外伸梁在自由端作用一集中力时的同样结果等等, 不再赘述^[13]

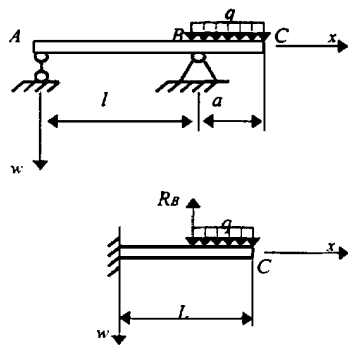


图 4

2 结 论

由式(1) ~ (6) 可知:在同指向的直角坐标下,以上几种载荷下,简支梁的绝对值最大挠度可由相应的比拟梁的绝对值最大挠度反转一正负号而获得;一端外伸梁跨内及外伸部分所产生的偏离原直线轴线位置程度最大的两个挠度的绝对值和,等于其比拟梁偏离程度最大挠度的绝对值^[13]

或综合之:以上几种载荷下原梁轴线变形后的横向最大相对偏移量即全梁中偏离无载荷时的直线位置的、程度最大的、一正向及一负向挠度之绝对值和,在数量上等于其相应的比拟梁自由端的挠度之绝对值^[13]

以上几种简支梁、外伸梁相对最大偏移程度同一于各自比拟梁的此量^[13]

计算以上几种梁轴线的相对最大偏移挠度的较为简便的方法: 1) 解脱梁的约束, 计算约束反力; 2) 找绝对值最大挠度位置(它是原梁轴向尺寸量的简单分式), 在此位置上装定比拟梁的固支端, 原梁相应位置上的载荷及反力加于比拟梁上; 3) 求比拟梁自由端挠度, 此即欲求者^[13]

[参 考 文 献]

[1] 刘鸿文主编¹⁹.材料力学[M]¹⁹.北京:高等教育出版社,1992,9:224~226¹⁹.
[2] 孙训方,方孝淑,关来泰编¹⁹孙训方,胡增强,金心全修订¹⁹材料力学[M]¹⁹.北京:高等教育出版社,1994,9:436~439¹⁹.
[3] 范钦珊主编¹⁹.工程力学教程(I) [M]¹⁹.北京:高等教育出版社,1998,8:270¹⁹.

Identity of Deflections Caused by Different Loads
Respectively on Several Kinds of Beams

YU Xiao-jin

(College of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The deflections of beams which carry concentrated loads only, carry uniformly distributed loads only and carry an applied couple or moment only have not any plain law one another. "comparing beams" are set up for replacing these beams mentioned above. Saying their deflections with maximum absolute value, the comparing beams deflection is equal to the one that is compared. Because all the comparing beams are cantilevers, the same feature of these beams mentioned above appears.

Key words: deflection; bending; beam; compare