

文章编号: 1005-0523(2000) 02-0092-05

不分明化近性空间(瑯)

蒋志勇

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 继续[1], 讨论了不分明化近性空间中的相对近性, 近性连续, 及近性连续与拓扑连续之间的关系^[9].

关键词: 相对近性; 近性连续; 拓扑连续

中图分类号: O 159

文献标识码: A

1 相对近性

引理 1.1 设 (X, P) 是不分明化近性空间, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, 定义二元 F -谓词 $P|_{X_0} \in F((X_0) \times P(X_0))$ 如下:

$$(A, B) \in P|_{X_0} := (A, B) \in P, A, B \subseteq X$$

则 $P|_{X_0}$ 是 X_0 上的不分明化近性关系^[13] 称 $P|_{X_0}$ 为 P 在 X_0 上的相对近性关系, 相应地, 称 $(X_0, P|_{X_0})$ 为 (X, P) 的近性子空间^[13]

证明 至于 $P|_{X_0}$ 满足 $(P1) - (P5)$ 是显然的^[13]

往证 $P|_{X_0}$ 还满足 $(P6)$: 对任意 $A, B \subseteq X_0$,

$$\begin{aligned} & \vdash \neg(A, B) \in P|_{X_0} \rightarrow (\exists C)((C \subseteq X_0 < (\neg(A, C) \in P|_{X_0}) < (\neg(B, C^c) \in P|_{X_0})) \\ & [\neg(A, B) \in P|_{X_0}] = [\neg(A, B) \in P] \leqslant \sup_{P \subseteq X} ([\neg(A, P) \in P] < [\neg(B, P^c) \in P]) \end{aligned}$$

设 $[\neg(A, B) \in P|_{X_0}] > \alpha, \alpha \in [0, 1]$ ^[13]

则存在 $P \subseteq X$, 使得 $\min([\neg(A, P) \in P], [\neg(B, P^c) \in P]) > \alpha$

令 $D = P \cap X_0 \subseteq X_0$, 则 $D^c = X_0 - D \subseteq X - P$, $\min([\neg(A, D) \in P|_{X_0}], [\neg(B, X_0 - D) \in P|_{X_0}]) \geqslant \min([\neg(A, P) \in P], [\neg(B, X - P) \in P]) > \alpha$ 于是, $\sup_{C \subseteq X_0} \min([\neg(A, C) \in P|_{X_0}], [\neg(B, X_0 - C) \in P|_{X_0}]) \geqslant \min([\neg(A, D) \in P|_{X_0}], [\neg(B, X_0 - D) \in P|_{X_0}]) > \alpha$

由 α 的任意性, 易知

$$[\neg(A, B) \in P|_{X_0}] \leqslant \sup_{C \subseteq X_0} \min([\neg(A, C) \in P|_{X_0}], [\neg(B, X_0 - C) \in P|_{X_0}])$$

定理 1.2 设 (X, P) 是不分明化近性空间, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, 则对任意的 $\emptyset \neq A, B \subseteq X_0$,

1) $\vdash B \in N_A^{X_0} \leftrightarrow (\exists P)((P \subseteq X) < (P \in N_A^X) < (B = P \cap X_0))$ 其中 $N_A^{X_0}, N_A^X$ 分别表示 A 的 $P|_{X_0}, P$ 不分明化近性邻域系^[13]

收稿日期: 1999-05-10; 修改日期: 1999-06-20

作者简介: 蒋志勇(1966-), 男, 江西南昌人, 华东交通大学讲师

2) $\models B \in \mathcal{T}_{P|_{X_0}} \leftrightarrow (\exists P)((P \subseteq X) < (P \in \mathcal{T}_P) < (B = P \cap X_0))$, 从而, $\models \mathcal{T}_{P|_{X_0}} \equiv \mathcal{T}_P(\cap) X_0$, 其中: $B \in \mathcal{T}_{P(\cap) X_0} := (\exists P)((P \subseteq X) < (P \in \mathcal{T}_P) < (P \cap X_0 = B))$ (13)

证明 以下证 1), 关于 2) 的证明考虑到篇幅问题, 此处略去(13)

1) 设 $N_A^{X_0}(B) = [\neg(A, X_0 - B) \in \mathcal{P}|_{X_0}] > \alpha, \alpha \in [0, 1)$, 今令 $P = B \cup (X - X_0) \subseteq X$, 则 $X - P = X_0 - B$ 且 $B = P \cap X_0$, $[N_A^X(P)] = [\neg(A, X - P) \in \mathcal{P}] = [\neg(A, X_0 - B)] = [\neg(A, X_0 - B) \in \mathcal{P}|_{X_0}] > \alpha$ 从而 $\sup_{B=P \cap X_0} N_A^X(P) \geq \alpha$ 反之, 设 $\sup_{B=P \cap X_0} N_A^X(P) = \alpha$, $\sup_{P \cap X_0=B} [\neg(A, X - P) \in \mathcal{P}] > \alpha, \alpha \in [0, 1)$, 则存在 $P \subseteq X$, 使得 $P \cap X_0 = B$ 及 $[\neg(A, X - P) \in \mathcal{P}] > \alpha$

由 $X_0 - B = X_0 - P \subseteq X - P$, 知 $[\neg(A, X_0 - B) \in \mathcal{P}|_{X_0}] > \alpha$ 即 $N_A^{X_0}(B) \geq \alpha$ 综上可得 $N_A^{X_0} = \sup_{P \cap X_0=B} N_A^X(P)$ (13)

注: 该定理实际上反映了相对近性拓扑与近性拓扑的相对性二者之间的关系(13)

推论 1.3 设 $\{X, \mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ 是不分明化近性空间族, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X, \mathcal{P} \in \mathcal{F}(P(X) \times P(X))$ 定义如下:

$$(A, B) \in \mathcal{P} := (\forall \{A_j\}_{j \in I_m}) (\forall \{B_k\}_{k \in I_n}) ((\bigcup_{j \in I_m} A_j = A) < (\bigcup_{k \in I_n} B_k = B))$$

$$\rightarrow (\exists j) (\exists k) ((j \in I_m) < (k \in I_n) \rightarrow (\forall i) (i \in I \rightarrow (A_j, B_k) \in \mathcal{P}_i))$$

即 $\mathcal{P}$ 为 X 上关于不分明化近性关系族 $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ 的初始近性关系(在不分明化近性空间(Ⅱ)一文中已证)(13)则有

$$1) \models (\forall i) (i \in I \rightarrow \mathcal{P}_i|_{X_0} < \mathcal{P}|_{X_0});$$

$$2) \text{ 若 } \mathcal{P}' \text{ 是 } X_0 \text{ 上任一不分明化近性关系, } \models (\forall i) (i \in I \rightarrow \mathcal{P}_i|_{X_0} < \mathcal{P}') \rightarrow \mathcal{P}|_{X_0} < \mathcal{P}';$$

$$3) \models \mathcal{T}_{\mathcal{P}|_{X_0}} \equiv \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_{\mathcal{P}_i|_{X_0}} \equiv \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_{\mathcal{P}_i}(\cap) X_0$$

证明根据[4]是易证的, 下面是由定义显成的两个事实:

定理 1.4 设 $\mathcal{P}_i (i = 1, 2)$ 是由 X 上的不分明化近性关系, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, 则有 $\models \mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1|_{X_0} < \mathcal{P}_2|_{X_0}$ (13)

定理 1.5 设 $(X, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X$, 则有 $\models (\mathcal{P}|_{X_1})|_{X_0} \equiv \mathcal{P}|_{X_0}$ (13)

2 近性连续

在[4]中, 我们已经看到由近性结构可以诱导一个拓扑结构, 在这部分中, 将讨论近性连续与拓扑连续之间的关系(13)

定义 2.1 设 $(X, \mathcal{P}), (Y, \mathcal{Q})$ 是不分明化近性空间, 一元 F -谓词 $PC \in \mathcal{F}(Y^X)$ 定义: $f \in PC := (\forall A) (\forall B) ((A \subseteq X) < (B \subseteq X) \rightarrow ((A, B) \in \mathcal{P} \rightarrow (f(A), f(B)) \in \mathcal{Q}))$ 则称 PC 为关于 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 的不分明化近性连续, 简称为不分明化近性连续(13)

引理 2.2 设 $(X, \mathcal{P}_1), (Y, \mathcal{P}_2)$ 是不分明化近性空间, 若 $f \in Y^X$, 则

$$\models f \in PC \leftrightarrow (\forall A)(\forall B)((A \subseteq \bar{Y}) < (B \subseteq \bar{Y}) \rightarrow (\neg(A, B) \in \mathbf{P}_2 \rightarrow \neg(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1)) \leftrightarrow f^{-1}(\mathbf{P}_2) < \mathbf{P}_1$$

$$\begin{aligned} \text{证明 } PC(f) &= \inf_{C, D \subseteq X} \min(1, 1 - \mathbf{P}_1(C, D) + \mathbf{P}_2(f(C), f(D))) \\ &= \inf_{C, D \subseteq X} \min(1, 1 - [\neg(f(C), f(D)) \in \mathbf{P}_2] + [\neg(C, D) \in \mathbf{P}_1]) \\ &\geq \inf_{f(C), f(D) \subseteq Y} \min(1, 1 - [\neg(f(C), f(D)) \in \mathbf{P}_2] + [\neg(C, D) \in \mathbf{P}_1]) \\ &\geq \inf_{f(C), f(D) \subseteq Y} \min(1, 1 - [\neg(f(C), f(D)) \in \mathbf{P}_2] + [\neg f^{-1}(f(C)), f^{-1}(f(D))] \in \mathbf{P}_1]) \\ &\geq \inf_{A, B \subseteq Y} \min(1, 1 - [\neg(A, B) \in \mathbf{P}_2] + [\neg(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1]) \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} &\inf_{A, B \subseteq Y} \min(1, 1 - [\neg(A, B) \in \mathbf{P}_2] + [\neg(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1]) \\ &= \inf_{A, B \subseteq Y} \min(1, 1 - [(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1] + [(A, B) \in \mathbf{P}_2]) \\ &\geq \inf_{\substack{f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B)) \subseteq Y \\ f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B)) \subseteq Y}} \min(1, 1 - [(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1] + [(A, B) \in \mathbf{P}_2]) \\ &\geq \inf_{\substack{f^{-1}(A) \subseteq X \\ f^{-1}(B) \subseteq X}} \min(1, 1 - [(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1] + [(A, B) \in \mathbf{P}_2]) \\ &\geq \inf_{C, D \subseteq X} \min(1, 1 - [(C, D) \in \mathbf{P}_1] + [(f(C), f(D)) \in \mathbf{P}_2]) = PC(f) \end{aligned}$$

因此, $PC(f) = \inf_{A, B \subseteq Y} \min(1, 1 - [\neg(A, B) \in \mathbf{P}_2] + [\neg(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \in \mathbf{P}_1])$

$$\begin{aligned} \text{另外, } PC(f) &= \inf_{A, B \subseteq X} \min(1, 1 - [(A, B) \in \mathbf{P}_1] + [(f(A), f(B)) \in \mathbf{P}_2]) \\ &= \inf_{A, B \subseteq X} \min(1, 1 - [(A, B) \in \mathbf{P}_1] + [(A, B) \in f^{-1}(\mathbf{P}_2)]) = [f^{-1}(\mathbf{P}_2) < \mathbf{P}_1] \end{aligned}$$

引理 2.3 设 $\mathbf{P}$ 是集合 Y 上关于不分明化近性关系族 $\{\mathbf{P}_i\}_{i \in I}$ 的初始近性关系, 若 $f \in Y^X$, X 为集合, 则 1) $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow f^{-1}(\mathbf{P}_i) < f^{-1}(\mathbf{P}))$; 2) 若 $\mathbf{P}$ 是 X 上的任一不分明化近性关系, 有 $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow f^{-1}(\mathbf{P}_i) < \mathbf{P}) \rightarrow f^{-1}(\mathbf{P}) < \mathbf{P}$ (13)

证明 1) 据[4]中的定理 2.1: $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow \mathbf{P}_i < \mathbf{P})$ 又由[4]中的定理 2.4 有 $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow (\mathbf{P}_i < \mathbf{P} \rightarrow f^{-1}(\mathbf{P}_i) < f^{-1}(\mathbf{P})))$ 则 $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow f^{-1}(\mathbf{P}_i) < f^{-1}(\mathbf{P}))$,

2) 类似[4]中定理 2.1(3)的证明方法同样可证, 此时只要注意到: 对任意的 $A, B \subseteq X$
 $[(A, B) \in f^{-1}(\mathbf{P})] = f^{-1}(\mathbf{P})(A, B) = \inf_{j \in I_m} \sup_{k \in I_n} \inf_{B_k = B} \sup_{j \in I_m} \inf_{i \in I} [(A_j, B_k) \in f^{-1}(\mathbf{P}_i)]$

所以, 该引理说明若 $\mathbf{P}$ 是 Y 上关于不分明化近性关系族 $\{\mathbf{P}_i\}_{i \in I}$ 的初始近性关系, 则对任何 $f \in Y^X$, $f^{-1}(\mathbf{P})$ 是 X 上关于 $\{f^{-1}(\mathbf{P}_i)\}_{i \in I}$ 的不分明化初始近性关系(13)

定理 2.4 设 $(X, \mathbf{P})$ 是 $\{X_i, \mathbf{P}_i\}_{i \in I}$ 的不分明化近性积空间, 对任何 $j \in I$, $p_j: X = \bigcup_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 表示投射, $(Y, \mathbf{P})$ 是不分明化近性空间, 若 $f \in X^Y$, 则有

$$\models f \in PC \leftrightarrow (\forall i)(i \in I \rightarrow p_i \in PC) \quad (13)$$

证明 由近性积空间定义及[4]中定理 2.1 有 $\models (\forall i)(i \in I \rightarrow p_i^{-1}(\mathbf{P}_i) < \mathbf{P})$
 又由定理 2.4^[4], 我们有:

$$\models (\forall i)(i \in I \rightarrow (p_i^{-1}(\mathbf{P}_i) < \mathbf{P} \rightarrow f^{-1}(p_i^{-1}(\mathbf{P}_i)) < f^{-1}(\mathbf{P}))) \quad (13)$$

所以,对任何 $i \in I$, $[(p_i \text{ 燐})^{-1}(P_i) < f^{-1}(P)] \geq [p_i^{-1}(P_i) < P] = 1$, 即 $[(p_i \text{ 燐})^{-1}(P_i) < f^{-1}(P)]$

P 是关于不分明化近性关系族 $\{p_i^{-1}(P_i) \mid i \in I\}$ 的近性关系, 则由引理 2.3, 我们得到

$$[f \in PC] = PC(f) = [f^{-1}(P) < P] \geq \inf_{i \in I} [f^{-1}(p_i^{-1}(P_i)) < P] = \inf_{i \in I} [(p_i \text{ 燐})^{-1}(P_i) < P] = \inf_{i \in I} PC(p_i \text{ 燐}) = \inf_{i \in I} [p_i \text{ 燐} \in PC]$$

另一方面, $\inf_{i \in I} [p_i \text{ 燐} \in PC] = \inf_{i \in I} [(p_i \text{ 燐})^{-1}(P_i) < P] = \inf_{i \in I} [f^{-1}(p_i^{-1}(P_i)) < P] \geq \inf_{i \in I} [f^{-1}(p_i^{-1}(P_i)) < f^{-1}(P)] < f^{-1}(P) < (f^{-1}(P) < P)] = [f^{-1}(P) < P] = PC(f)$

综上有

$$[f \in PC] = PC(f) = \inf_{i \in I} PC(p_i \text{ 燐}) = \inf_{i \in I} [p_i \text{ 燐} \in PC] \quad (13)$$

定理 2.5 设 Q 是 Y 上关于不分明化近性关系族 $\{Q_i \mid i \in I\}$ 的初始近性关系, (X, P) 是不分明化近性空间, 若 $f \in Y^X$, 则 $\models f \in PC \leftrightarrow (\forall i)(i \in I \rightarrow f \in PC)$, 其中: 后者 $f \in PC$ 表示 f 关于 $P-Q$ 的不分明化近性连续⁽¹³⁾

证明 由定理 2.3, 有 $[f \in PC] = [f^{-1}(Q < P)] \geq \inf_{i \in I} [f^{-1}(Q < P_i)] = \inf_{i \in I} [f \in PC]$ 另一方面, 由引理 2.3, 有 $\inf_{i \in I} [f \in PC] = \inf_{i \in I} [f^{-1}(Q < P_i)] \geq \inf_{i \in I} [(f^{-1}(Q < P_i) < f^{-1}(Q < P))] = [f^{-1}(Q < P)] = [f \in PC]$ (13)

定理 2.6 设 (Y, Q) 是不分明化近性空间, P 是集合 X 上关于不分明化近性关系族 $\{P_i \mid i \in I\}$ 的最终近性关系, 若 $f \in Y^X$, 则有 $\models f \in PC \leftrightarrow (\forall i)(i \in I \rightarrow f \in PC)$ 其中后者 $f \in PC$ 表示 f 关于 $P_i - Q$ 的不分明化近性连续

证明 由定理 2.2⁽¹⁾, 有 $[f \in PC] = [f^{-1}(Q < P)] \geq \inf_{i \in I} [f^{-1}(Q < P_i)] = \inf_{i \in I} [f \in PC]$, 另一方面, $\inf_{i \in I} [f \in PC] = \inf_{i \in I} [f^{-1}(Q < P_i)] \geq \inf_{i \in I} [(f^{-1}(Q < P_i) < (P < P_i))] = \max(\inf_{i \in I} [P < P_i] + [f^{-1}(Q < P)] - 1, 0) = [f^{-1}(Q < P)] = [f \in PC]$ (13)

下面讨论近性连续与拓扑连续的关系⁽¹³⁾

定义 2.7⁽¹⁾ 设 (X, T) 、 (Y, U) 是不分明化拓扑空间, 一元 F -谓词 $C \in F(Y^X)$ 定义: $C(f) : (\forall U)((U \subseteq Y) < (U \in U) \rightarrow (f^{-1}(U) \in T))$, 则称 C 为不分明化拓扑连续(关于 $(T - U)$)⁽¹³⁾

定理 2.8 设 (X, P_1) 、 (Y, P_2) 是不分明近性空间, 若 $f \in Y^X$, 则 $\models f \in PC \rightarrow C(f)$ (13) 作为定理 2.8 的递定理, 我们先给出下面的

定义 2.9 设 (X, T) 为不分明化拓扑空间, 称 X 上的不分明化近性关系 P_1 为 T 的 Căh - Stone 近性结构, 若对 X 上任一不分明化近性关系 P , 有

$$\models (T \equiv T_{P_1}) < (T \equiv T_{P_1} \rightarrow P' < P_1) \quad (13)$$

定理 2.10 设 (X, T) 是不分明化拓扑空间, (X, P_1) 、 (Y, P) 是不分明化近性空间, 若 P_1 是 T 的 Căh - Stone 近性结构, $f \in Y^X$ 为满射, 则有 $\models C(f) \rightarrow f \in PC$ (13)

本定理的证明可分 4 步完成, 因篇幅较长, 故此处略去⁽¹³⁾

定理 2.11 设 (X, P) 是不分明化近性空间, 若 $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, $f : P(X_0) \rightarrow P(X)$ 为标准包含映射, 则 $\models f^{-1}(P) \equiv P|_{X_0}$ (13)

证明 由于对任何的 $A \in P(X_0)$, $f(A) = A \in P(X)$, 则对任何的 $A, B \in P(X_0)$

$$[(A, B) \in f^{-1}(P)] = [(f(A), f(B)) \in P] = [(A, B) \in P] = [(A, B) \in P|_{X_0}]$$

推论 2.12 (X, P) 为不分明化近性空间, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, 若 $f \in X^{X_0}$ 为标准包含映射, 则 $\models f \in PC$

定理 2.13 设 $(X, P_1), (Y, P_2), (Z, P_3)$ 是不分明化近性空间, 若 $f \in Y^Z, g \in Z^Y$, 则有 $\models (f \in PC) \prec (g \in PC) \rightarrow (g \circ f) \in PC$ (13)

定理 2.14 设 P, Q 是 X 上两个不分明化近性关系, 若 $f \in X^X$, 则 $\models (f^{-1}(Q) \equiv Q \rightarrow (f \in PC \leftrightarrow Q \prec P))$ (13)

定理 2.15 设 P, P_1 是 X 上的不分明化近性关系, Q, Q_1 是 Y 上的不分明化近性关系, 若 $f \in Y^X$, 则有 $\models (f \in PC) \prec (P \prec P_1) \prec (Q \prec Q_1 \rightarrow (f \in PC))$ (13)

定理 2.16 设 $(X, P), (Y, Q)$ 是不分明化近性空间, $f \in Y^X$, 若 $f(X) \subseteq Y_0 \subseteq Y$, 令 $g = f|_{Y_0}$, 则有 $\models f \in PC \leftrightarrow g \in PC$ (13)

定理 2.17 设 $(X, P), (Y, Q)$ 是不分明化近性空间, $f \in Y^X$, 若 $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, 令 $g = f|_{X_0}$, 则有 $\models f \in PC \rightarrow g \in PC$ (13)

上述 2 定理的证明是显而易见的(13)

[参 考 文 献]

- [1] 蒋志勇¹⁹. 不分明化近性空间(璠[J]¹⁹. 华东交通大学学报¹⁹. 1999, (4): 78~83¹⁹.
- [2] MING Sheng-ying. A new approach for fuzzy topology(璠[J], F.S.S. 1991(55), 193~207¹⁹.
- [3] KATSARAS A K. Fuzzy Proximity Spaces[J]. J. Math Anal Appl 1979(68), 100~110¹⁹.
- [4] WANG Jing-liu. Fuzzy proximity Spaces Redefined[J], F.S.S 1985(15), 241~248¹⁹.

Fuzzifying Proximity Spaces(璠璠

JIANG Zhi-yong

(School of Natural science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we give the definitions of relative proximity and proximity continuity in fuzzifying proximity spaces. Meanwhile, we have discussed the relations between proximity continuity and topological continuity.

Key words: proximity topology; initial proximity; proximity product space