

文章编号: 1005-0523(2000)02-0097-04

DEA 有效决策单元的实际有效率

马本江, 刘二根, 傅丽仙

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:理论上论证了 DEA 有效决策单元实际有效率的存在性及其经济含义, 指出实际有效率从另一角度确定了已 DEA 有效单元的排序^[9].

关键词:绝对效率; 优势集; 价格区间; 实际有效率

中图分类号: O22 **文献标识码:** A

0 预备知识

考虑如下 C^2R 模型的初始形式:

$$(\bar{P}) \begin{cases} U_{\bar{P}} = \max \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0 \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{y}_j \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j \leq 1 \\ \mathbf{u} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中: $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j$ 是第 j 个决策单元的投入、产出向量; $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 分别是投入、产出的权重向量, 都是非负向量^[13]

所谓 DMU_0 (英文缩写, 表示“决策单元 j_0 ”, 其投入、产出为 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, 即为 $(\bar{P})$ 中被评价决策单元)^[13] DEA 有效是指存在权重向量 $\mathbf{u} > 0, \mathbf{v} > 0$ 使 $(\bar{P})$ 中的效率值 $U_{\bar{P}} = 1$, 而 $U_{\bar{P}} = 1$ 是具有相对意义的, 详见文献^[1]^[13]

定义 1 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是某种确定的权重向量, 称 $\eta = \mathbf{u}^T \mathbf{y}_j \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 DMU_j 在权重 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 下的绝对效率^[13]

定理 1 设 $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T, \mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T (j = 1, 2, \dots, n)$ 分别是 n 个决策单元的 m 种投入与 s 种产出构成的向量, DMU_0 DEA 有效 $\iff$ 存在 $S \times 1$ 向量 $\mathbf{u} > 0$ 与 $m \times 1$ 向量 $\mathbf{v} > 0$, 使任意 $1 \leq j \leq n$, 都有 $\mathbf{u}^T \mathbf{y}_j \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0 \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0$

说, 如果 DMU_0 在投入、产出的定价上有机会获得最大的利润率, 就说该决策单元 DEA 有效^[13]

定义 2 称

$$E_0 = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}^T \mathbf{y}_j \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_j \leq \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0 \setminus \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, \mathbf{u} > 0, \mathbf{v} > 0) \right\}$$

为 DMU_0 的优势集^[13]

定理 2 (DMU_0 DEA 有效的判定定理) DMU_0 DEA 有效的充分必要条件是 DMU_0 的优势集 $E_0 \neq \emptyset$ ^[13]

定理 3 DMU_0 的优势集 $E_0 = \{k_1 \mathbf{u}, k_2 \mathbf{v} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \bar{E}, k_1 > 0, k_2 > 0\}$, 其中

收稿日期: 1999-11-05;

作者简介: 马本江 (1972-), 男, 内蒙哲盟人, 华东交通大学基础科学学院讲师^[13]

$$\bar{E} = \left\{ (u, v) \left\{ \begin{array}{l} u^T y_0 - v^T x_0 = 0 \\ u^T y_j - v^T x_j \leq 0 \end{array} \right. \quad u > 0, v > 0, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

对于 n 个决策单元, 任意 $u > 0, v > 0$, 必存在 j_0 , 使任意 $1 \leq j \leq n$ 有 $u^T y_j \setminus v^T x_j \leq u^T y_0 \setminus v^T x_0$, 即 $(u, v) \in E_0$ (以 " j_0 " 为下标都简记为 " 0 ", 如把 E_{j_0} 表示为 " E_0 " 下同) (13) 于是有定理 4:

定理 4 有 n 个决策单元, E_j 是第 j 个决策单元的优势集 ($j = 1, 2, \dots, n$), 则 $\bigcup_{j=1}^n E_j = R^{n+}_{+}$ (13)
(注: 以上定义的引入、定理的证明详见文献 [2])

1 实际有效率

市场环境下的企业的生产活动中, 原材料(投入)与产品(产出)的价格往往是波动, 有涨跌的, 那么对于同类部门的几个企业, 评价哪些企业更能经受价格涨跌的考验, 而相对较好, 就变得十分有意义 (13)

设有市场环境下的 n 个决策单元, $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$, $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T$ 是第 j 个决策单元的投入、产出向量 ($j = 1, 2, \dots, n$) (13) 我们一般无法确知各决策单元相应的单位投入与单位产出的价格, 但通过对市场的分析预测, 可确知这些价格所在的范围, 我们定义:

定义 3 令 $I_1 = \{p \mid p = (p_1, p_2, \dots, p_m), p_i \text{ 是每个决策单元第 } i \text{ 种投入的价格且 } m_i \leq p_i \leq \bar{m}_i, m_i, \bar{m}_i \in R^1\}$ 称为每个决策单元的投入价格区间; $I_2 = \{q \mid q = (q_1, q_2, \dots, q_s), q_i \text{ 是每个决策单元第 } i \text{ 种产出的价格且 } n_i \leq q_i \leq \bar{n}_i, n_i, \bar{n}_i \in R^1\}$ 称为每个决策单元的产出价格区间; 令 $I = I_1 \times I_2$ 称为每个决策单元的价格区间 (13)

显然 I_1, I_2, I 都勒贝格可测, 且有

$$m(I) = m(I_1) \cdot m(I_2) = \prod_{i=1}^m (\bar{m}_i - m_i) \prod_{i=1}^s (\bar{n}_i - n_i) \quad (13)$$

引理 1 有 n 个决策单元, E_j 是第 j 个决策单元的优势集 ($j = 1, 2, \dots, n$), I 是每个决策单元的价格区间, 则 $\bigcup_{j=1}^n (E_j \cap I) = I$ (13)

证明 由 I 的定义知 $I \subset R^{n+}_{+}$, 又由定理 4 $\bigcup_{j=1}^n E_j = R^{n+}_{+}$, 所以 $\bigcup_{j=1}^n (E_j \cap I) = I$

引理 2 有 n 个决策单元, E_j 是第 j 个决策单元的优势集 ($j = 1, 2, \dots, n$), I 是每个决策单元的价格区间, 则 $E_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 勒贝格可测, 且 $m(E_j \cap I) \leq mI < \infty$ (13)

证明 令 $f_j = u^T y_j \setminus v^T x_j$, $(u, v) \in R^{n+}_{+}$ (13) 即 f_j 为定义在可测集 R^{n+}_{+} 上的函数 (13)
因为对任何有限实数 a ,

$$\begin{aligned} A(f_j > a) &= \{u, v \mid f_j > a\} = \{u, v \mid u^T y_j - av^T x_j > 0, (u, v) \in R^{n+}_{+}\} \\ &= \{u, v \mid u^T y_j - av^T x_j > 0\} \cap R^{n+}_{+} \end{aligned}$$

又 $\{u, v \mid u^T y_j - av^T x_j > 0\}$ 表示超平面 $u^T y_j - av^T x_j = 0$ 分 R^{n+}_{+} 空间的一侧, 为开集, 它是勒贝格可测的 (13)

于是 $A(f_j > a)$ 是可测集 (13)

所以 $f_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 R^{n+}_{+} 上的可测函数 (13)

由可测函数的性质, 任意 $j_0 (j_0 \text{ 是 } 1 \text{ 到 } n \text{ 的自然数})$ 有:

$$A(f_j \leq f_0) = \{u, v \mid u^T y_j \setminus v^T x_j \leq u^T y_0 \setminus v^T x_0\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

是 R^{n+s} 上的可测集^[13]

注意到 DMU_0 的优势集

$$E_0 = \bigcap_{j=1}^n A(f_j \leq f_0)$$

所以 E_0 勒贝格可测^[13]

于是 $E_0 \cap I$ 勒贝格可测且显然^[13]

$$m(E_0 \cap I) \leq mI < \infty$$

由 j_0 的任意性, 命题成立^[13]

由引理 1、引理 2, 我们定义:

定义 3 有 n 个决策单元, E_j 是第 j 个决策单元的优势集, I 是每个决策单元的价格区间, 称 $\xi = m(E_j \cap I) / mI$ 为第 j 个决策单元的实际有效率 ($j = 1, 2, \dots, n$) ^[13]

显然 $0 \leq \xi \leq 1$ ^[13]

定义 4 设 DMU_1 与 DMU_2 的投入、产出分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 总存在 $k > 0$ 使 $(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$, 则称 DMU_1 与 DMU_2 等价^[13]

易知两个等价的决策单元在任意权重 (u, v) ($u > 0, v > 0$) 下取得相同的绝对效率, 因此有:

定理 5 两个等价的决策单元的优势集相等^[13]

引理 3 设 DMU_1 与 DMU_2 是 n 个决策单元中任意两个彼此不等价的决策单元, 它们的优势集分别为 E_1, E_2 , 令 $E = E_1 \cap E_2$, 则 $mE = 0$, 即 E 至多是测度为 0 的非空集^[13]

由引理 1、引理 2 易证如下定理:

定理 6 有 n 个决策单元, 设其中至多有 k 个决策单元彼此互不等价, 不妨设为 $DMU_1, DMU_2, \dots, DMU_k$, 它们的实际有效率依次为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, 则 $\sum_{i=1}^k \xi_i = 1$

2 实际有效率及有关结论的经济含义

对于同类部门的 n 个企业来说, DMU_j 的实际有效率 ξ 的大小标志着该决策单元在一定市场环境中 (各投入、产出的价格在一定范围内变动) 取得最大利润率的机会 (概率) 的大小, 它越大, 说明 DMU_j 在相对比较中越能经受价格涨跌的考验, 而取得相对优势, 也就是说: 实际有效率较大的决策单元在同类部门的竞争中, 获胜的希望较大; 当实际有效率为“1”时, 标志该决策单元一定能获胜^[13] 因此, 实际有效率从另一角度确定了已 DEA 有效决策单元的排序^[13]

定理 6 表明, n 个决策单元中, 彼此互不等价的决策单元同时市场中占有优势, 取得最大利润率的机会几乎是零, 即使是两个决策单元都 DEA 有效也如此^[13]

综上所述, “实际有效率”是决策单元“DEA 有效性”的一个补充, 它指出了决策单元“DEA 有效”这种有效性的“程度”和“方向”, 所谓“程度”是指若 $\xi < \xi$, 则 DMU_2 更有可能取得最大利润率, 而在竞争中占有优势, 即 DMU_2 有效性大; 所谓“方向”是指决策单元的实际有效率与市场环境 (价格区间) 密切相关, 在这个市场环境中具有优势的决策单元 (实际有效率较大), 在另一市场环境中其优势可能会失去 (实际效率较小) 甚至完全失去 (实际有效率为 0) ^[13]

最后应该指出的是,定义 1 中的“价格区间”可以推广到一般的可测的并具有限勒贝格测度的权重 (u, v) 的集合^[13]

[参 考 文 献]

- [1] 魏权龄¹⁹.评价相对有效性的 DEA 方法[M]¹⁹.北京:人民出版社,1988¹⁹.
- [2] 马本江,杨印生等¹⁹.对 DEA 有效决策单元性质的讨论[J]¹⁹.吉林工业大学学报,1998,(2)¹⁹.
- [3] 严绍宗,童裕孙¹⁹.实变函数论与泛函分析[M]¹⁹.北京:经济科学出版社¹⁹.

Probability of Actual Efficiency of the DEA Efficient Dmus

MA Ben-jiang, LIU Er-gen, FU Li-xian

(Shool of Natural Science East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper theoretically demonstrates the existence and the economic significance of the probability of actual efficiency of the DEA efficient Dmus and points probability of actual efficiency. The arrangement of the DEA efficient Dmus is presented in a new light.

Key words: absolute efficiency; superior set; price interal; probablity of reality efficiency