

文章编号: 1005-0523(2000) 02-0101-03

关于简单图中对称点的性质

王 森, 周尚超, 刘二根, 邓毅雄

(华东交通大学基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 研究了简单图的一些重要性质^[1].

关 键 词: 同构映射; 对称点; 对称同构映射

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

0 引 言

简单图中的对称点是图中的相似点的一种特殊情况, 但不是相似点^[1].

定义 1 如果图 G 与图 H 之间存在对应的点与点之间、对应的线与线之间的一一对应则称 G 与 H 同构, 即 $G \cong H$ 这个对应称图 G 与图 H 的同构映射^[13]

定义 2 对于任意一标记图 G 点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 存在两点 $v_i, v_j \in G$, 由 G 经 v_i 与 v_j 交换标记形成图 G_1 , 使得图 G 与图 G_1 在映射 $f: v_k \longleftrightarrow v_k (k=1, 2, \dots, n)$ 下同构, 则称 v_i 和 v_j 两点是关于图 G 的一对对称点, 记为 $G: v_i \longleftrightarrow v_j$; 同时称映射 f 为图的对称同构映射; G_1 称为 G 的关于 f 的对称同构图^[13]

定义 3 如果图 G 中存在 $k (k > 2)$ 个点, 使这 k 个点中任意两点均关于图 G 是对称点, 则称这 k 个点是关于图 G 相互对称的^[13]

1 主要结论

通过以下几个定理给出:

定理 1 如果图 G 有一对对称点 v_1, v_2 , 则 v_1 和 v_2 度相同^[13]

由对称点的定义及定理 1 的证明有下面命题成立:

定理 2 如果图 G 有一对对称点 v_1, v_2 , 则 v_1 和 v_2 与图的其他点相邻关系相同^[13]

对于一个图中的对称点之间也有:

定理 3 图 G 中有一对对称点 v_1, v_2

1) 如果 v_1 与 v_2 相邻, 则图 G 经去掉线 $v_1 v_2$ 后形成的图 G_1 中 v_1, v_2 两点仍是关于图 G_1 是一对对称点;

2) 如果 v_1 与 v_2 不相邻, 则图 G 经加上线 $v_1 v_2$ 后形成的图 G_1 中 v_1, v_2 两点仍是关于图

收稿日期: 2000-01-20; 修订日期: 2000-03-18

基金项目: 江西省自然科学基金项目(9911020)。

作者简介: 王 森(1963-), 男, 黑龙江齐齐哈尔人, 华东交通大学讲师^[13]

G_1 是一对对称点^[13]

利用对称点的定义考察 v_1, v_2 两点在加线(去线)后对称同构映射不变即可得证^[13]

定理 4 如果图 G 有 $n(n \geq 2)$ 个相互对称点 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 则图 G 经去掉其他点, 即只剩下 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 而成的子图 G_1 是 n 个点的完全图或其补图为完全图^[13]

证明 在 G 图中考察子图 G_1

情形 1. v_1 与 v_2 相邻

由定理 2: $v_3, v_4, \dots, v_n$ 均与 v_1 相邻, 即 $v_2, \dots, v_n$ 相邻;

v_1 与 v_2 是对称点; v_2 与 $v_1, v_3, \dots, v_n$ 相邻;

v_1 与 v_3 是对称点; v_3 与 $v_1, v_2, v_4, \dots, v_n$ 相邻;

...

v_1 与 v_n 是对称点; v_2 与 $v_1, v_2, \dots, v_{(n-1)}$ 相邻;

所以 G_1 是具有 n 个点的完全图^[13]

情形 2. v_1 与 v_2 不相邻

类似可证 G_1 是全不连通的图, 即 G_1 的补图是完全图^[13]

含有对称点的图与其同构图还有一些性质:

定理 5 如果图 G 有一对对称点, 则与图 G 同构的任一图必存在一对对称点, 且在同构映射下与图 G 的这对对称点对应^[13]

证明: 不妨设图 G 的一对对称点为 v_1, v_2 , 且设图 H 与图 G 同构, $G \cong H$

为了方便证明给 G 和 H 作标记: $V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$, $V(H) = \{u_j | 1 \leq j \leq n\}$

必存在一个同构映射 $f_1: G \cong H$, 有两个不同点 $u_i, u_j \in H$ ($i \neq j$) 使

$$f_1: v_1 \longleftrightarrow u_i, \quad v_2 \longleftrightarrow u_j$$

图 G 经交换点 v_1, v_2 标记而形成图记为 G_1 , 图 H 经交换点 u_i, u_j 标记而形成图记为 H_1 , 显然图 G 与图 H 在对称同构映射 f_1 下同构, 即 $f_1: G_1 \cong H_1$ ^[13]

由对称点定义知, 存在一对称同构映射 $f_2: G \cong G_1, f_2: v_k \longleftrightarrow v_k$, 除去 v_1, v_2 两点有: $f_1 = f_2$, 又已知, $f_1: G \cong H$ 且对应关系如下

图:	H	G	G	G_1	G_1	H_1
对称点对应:	$f_1: u_i \longleftrightarrow v_1,$	$f_2: v_1 \longleftrightarrow v_2,$		$f_1: v_2 \longleftrightarrow u_j$		
	$f_1: u_i \longleftrightarrow v_1,$	$f_2: v_1 \longleftrightarrow v_2,$		$f_1: v_2 \longleftrightarrow u_j$		
其他点对应:	$f_1 = f_2: u_k \longleftrightarrow v_h,$	$v_h \longleftrightarrow v_h,$		$v_h \longleftrightarrow u_k$		
	(k ≠ 1, 2; h ≠ i, j)					

由图可知 $f_1(f_2(f_1))$ 是通过中介图 G 与图 G_1 形成的关于图 H 的对称同构映射, 从而 u_i 与 u_j 两点是关于图的对称点, 且与 G 图中对称点同构对应^[13]

同理可证:

推论 1 图 G 中有 $k(k \geq 2)$ 个互对称点, 则任一与图 G 同构的图内必存在 k 个相互对称点, 且与 G 图中这 k 个相互对称点同构对应^[13]

一个图中的相互对称点之间是等价的, 同构图的对应对称点之间不仅可以任意同构对应, 而且可以同时增减同构对称点^[13]

推论 2 两图同构 $G \cong H$, G 图有 $n(n \geq 2)$ 个相互对称点 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 从这 n 个对称点

中任意去掉 $k(k \leq n)$ 个对称点而生成图 G_1 ; H 图与之对应的 n 个相互对称点 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 从这 n 个对称点中也任意去掉 $k(k \leq n)$ 个对称点而生成图 H_1 , 则 $G_1 \cong H_1$ (13)

两图同构 $G \cong H$, G 图有 $n(n \geq 2)$ 个相互对称点 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 从这 n 个对称点中任意增加 k 个点, 使得它们成为 G 图的相互对称点而生成的图记为 G_1 , H 图与之对应的 n 个相互对称点 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 从这 n 个对称点也任意增加 k 个点, 使得它们成为 G 图的相互对称点而生成的图记为 H_1 , 则 $G_1 \cong H_1$.

定理 6 图 G 中有 n 个相互对称点, 则图 G 可与 $n!$ 个不同的标记图在对称同构映射下同构 (13)

证明: 设标记图 H 与图 G 同构, 即 $G \cong H$. 由推论 1 知图 H 亦有 n 个对称点, 不妨设为 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 任取 v_i 与 v_j 两点交换标记形成图 H_{ij} ($i \neq j$).

对称点定义知: $H_{ij} \cong H$

已知: $H \cong G$

得 $H_{ij} \cong G$

同理 H_{ij} 中的 n 个相互对称点又何任意交换标记形成的图与图 G 同构, 生成 G 的对称同构成图中的对应对称点又可交换标记而生成 G 的对称同构图, ……以此类推, 由排序如图 H 中 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的点可以交换标记而生成的图共 (包含 H 图) 有 $n!$ 个, 且与图 G 对称同构 (13)

[参 考 文 献]

- [1] F 哈拉里·图论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1968.
- [2] 李慰萱·图论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1980.
- [3] Bondy J A, Murty U S R·Graph Theory with Applications·Macmillan[M]·London and Elsevier, New York: 1976.

On Characteristic of Symmetrical Points in a Simple Graph

WANG Sen, ZHOU Shang-chao, LIU Er-gen, DENG Yi-xiong

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper obtains important characteristics of symmetrical points in any simple graph by analyzing their structure.

Key words: homologue of same structure; symmetrical points