

文章编号:1005-0523(2000)03-0075-04

区间上帐篷类映射的强混合性

汪火云¹, 卢建平²

(1. 广州教育学院 数学系, 广东 广州 510030; 2. 华南农业大学 基础课部, 广东 广州 510631)

摘要: 本文证明了帐篷类映射相对于 Lebesgue 测度而言是强混合的^[1].

关键词: 帐篷类映射; 强混合保测变换; Lebesgue 测度

中图分类号: O174.12

文献标识码: A

1 术语与结果叙述

记 $I = [0, 1]$, L 为 I 上的 1 维 Lebesgue 测度^[1]. 对于每一个整数 $n \geq 2$, 定义映射 $\lambda: I \rightarrow I$ 如下: 对于任何 $x \in I$, 如果 $x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ 对于某一个 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 成立, 则

$$\lambda(x) = (-1)^{inx} + (-1)^{i+1}i + ((-1)^{i+1} + 1)/2 \quad (1)$$

易见 λ 便是通常所谓的帐篷映射^[1].

定义映射 $\mu_n: I \rightarrow I$ 使得

$$\mu_n(x) = \begin{cases} n(x - \frac{i}{n}), & \text{如果对于某一个 } i = 0, 1, \dots, n-1, x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \\ 0 & \text{如果 } x = 1 \end{cases}$$

我们称在 [1] 中如此定义的 λ 及 μ_n 映射类为帐篷类映射^[1].

为方便起见, 笔者将 $I \rightarrow I$ 的帐篷映射记为 λ 即

$$\lambda(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2(1-x), & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

令 $\Phi = \{A \mid A = [0, b] \text{ 或 } A = (a, b], 0 \leq a < b \leq 1\}$, 则 Φ 是一个半代数^[1]. 设 $B(I)$ 是由 Φ 生成的 σ 代数, 这是 I 所有 Borel 子集组成的 σ 代数, L 为 Lebesgue 测度, 则 $(I, B(I), L)$ 是一个概率空间^[1]. 设 $\gamma = \{0, 1\}$, $C = 2^\gamma$, 测度 μ 由概率向量 $P = (1/2, 1/2)$ 给出, 则 (γ, c, μ) 是一个概率空间^[1]. 令 $(X_i, B_i, m_i) = (\gamma, c, \mu)$, $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i \triangleq \Omega$ ^[1]. $r \geq 0$, 称 $A = \prod_{j=0}^r A_j \times \prod_{i=r+1}^{\infty} X_i$ 为可测矩形, 其中 $A_j \in B_j$, $0 \leq j \leq r$, 所有可测矩形之集 Φ' 是一个半代数^[1]. 定义映射 $\tau: \Phi' \rightarrow R^+$ 如下:

$$\tau(A) = \prod_{j=0}^r m_j(A_j), \quad \forall A \in \Phi'$$

收稿日期: 2000-04-23; 修订日期: 2000-06-08

基金项目: 广东省自然科学基金资助课题^[1] (970395)

作者简介: 汪火云 (1963-), 男, 江西南昌人, 广东教育学院副教授^[1].

令 $B(\bullet)$ 是由 Φ 生成的 σ 代数, 再将 τ 扩张为 $(\bullet, B(\bullet))$ 上的概率测度 m , 这时 $(\bullet, B(\bullet), m)$ 是一个概率空间^[13]

$\forall n \geq 0$, 令 $\{a^0, a^1, \dots, a^n\} = \{x = x_1 x_2 \dots \in \bullet \mid x_j = a_j, 0 \leq j \leq n\}$, 称之为柱形^[13] 设 D 是所有柱形组成的集, 则 D 也是生成 $B(\bullet)$ 的一个半代数^[13]

现在定义 $\bullet$ 上的一个自映射 T 如下

$$T(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \dots, & x_0 = 0 \\ \overline{x_1 x_2 \dots}, & x_1 = 1, \end{cases} \quad \text{其中 } \overline{x_i} = \begin{cases} 1 & x_i = 0 \\ 0 & x_i = 1 \end{cases}$$

在符号空间上证明自映射 T 与帐篷映射, λ 是共轭的, 据此证明了帐篷映射对于 Lebesgue 测度而言是强混合的^[13] 其他帐篷类映射的强混合性类似可证^[13]

2 引理与结论证明

引理 1 设 $(I, B(I), L)$ 如前定义, λ 是 $I \rightarrow I$ 上的帐篷映射, 则 λ 是保测的^[13]

由 [2] 中定理 1.1 易证^[13]

引理 2 设 $(\bullet, B(\bullet), m)$ 及映射 T 如前定义, 则 T 是强混合的^[13]

证明 由 [2] 中定理 1.1 易证 T 是保测的^[13]

设 D 是 $\bullet$ 的所有柱形之集^[13] $A = [a^0, a^1, \dots, a_n], B = [b^0, b^1, \dots, b_m] \in D$, 则 $T^{-1}(A) = [0, a^0, a^1, \dots, a_n] \cup [1, \overline{a^0}, \overline{a^1}, \dots, \overline{a_n}]$ (13) 当 $n \geq 2$ 时, 易证 $T^{-n}(A) = \left[\prod_{i=0}^{n-2} X_i \times \{0\} \times \{a^0\} \times \dots \times \{a_n\} \times \prod_{j=2n+1}^{\infty} X_j \right] \cup \left[\prod_{i=0}^{n-2} X_i \times \{1\} \times \overline{a^0} \times \dots \times \overline{a_n} \times \prod_{j=2n+1}^{\infty} X_j \right]$ (13) 当 $n-1 > m$ 时, $T^{-n}(A) \cap B = \left[\{b^0\} \times \dots \times \{b_m\} \times \prod_{i=m+1}^{n-1} X_i \times \{0\} \times \{a^0\} \times \dots \times \{a_n\} \times \prod_{j=2n+1}^{\infty} X_j \right] \cup \left[\{b^0\} \times \dots \times \{b_m\} \times \prod_{j=m+1}^{n-1} X_j \times \{1\} \times \overline{a^0} \times \dots \times \overline{a_n} \times \prod_{j=2n+1}^{\infty} X_j \right]$ (13) 于是 $T^{-n}(A) \cap B = m(A) \cdot m(B)$

由 [2] 中定理 1.17 知 T 是强混合的^[13]

现在定义 $\phi: \bullet \rightarrow I$ 映射如下

$$\phi(x) = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_2}{2^3} + \dots, \forall x = x_0 x_1 x_2 \dots \in \bullet$$

设 $E = \{x \in \bullet \mid \exists n \geq 0, \text{使得 } x_n = x_{n+1} = \dots\}$, $I_1 = \{x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \dots \in I \mid \exists n \geq 0\}$ (13) 使 $x_n = x_{n+1} = \dots, x_i \in \{0, 1\}$, 则易证

结论 1 $m(E) = 0$

结论 2 设 $M_1 = \bullet \setminus E$, 则 $T M_1 \subset M_1$ 且 $m(M_1) = 1$

结论 3 $L(I_1) = 0$

结论 4 令 $M_2 = I \setminus I_1$, 则 $L(M_2) = 1$ 且 $M_2 \subset M_1$ (13)

结论 5 $\phi|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ 是一一映射^[13]

结论 6 $\lambda \phi = \phi T$, $\forall x \in \bullet$ (13)

引理 3 $(M_1, B(\bullet) \cap M_1, m)$ 及 $(M_2, B(I) \cap M_2, L)$ 是两个概率空间, 则一一映射 $\varnothing|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ 是可逆保测的^[13]

证明 1) $\varnothing|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ 是保测的

设 $\Phi = \{A \mid A = (a, b] \text{ 或 } A = (0, b], 0 \leq a < b \leq 1\}$ 是生成 $B(I)$ 的一个半代数, 则易证 $\Phi \cap M_2 = \{A \cup M_2 \mid A \in \Phi\}$ 是生成 $B(I_2) \cap M_2$ 的一个半代数, 不妨设 $A = (a, b]$, 其中 $a = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \dots, b = \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2^2} + \dots$, 由于 $b > a$, 故 $K = \min \{i \geq 0 \mid b_i > a_i\}$ 存在, 不妨设 $K = 0$, 于是 $a_0 = 0, b_0 = 1$ ^[13]

$$\varnothing^{-1}|_{M_1}(A \cap M_1 \mid a < \varnothing(x) \leq b)$$

令 $P = \{x \in \bullet \cap M_1 \mid a < \varnothing(x) \leq \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots\}; Q = \{x \in \bullet \cap M_1 \mid \frac{b_0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \dots \leq \varnothing(x) \leq b\}$, 则 $P \cup Q = \varnothing^{-1}|_{M_1}(A \cap M_2), P \cap Q = \varnothing$ ^[13]

考察 P :

当 $a_1 = 0$ 时, $P = ([a_0] \cap M_1) \cup ([a_0 a_1] \cap P), m(P) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m([a_0 a_1] \cap P)$, 因此有: $m(p) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - a_1) + m([a_0 a_1] \cap P)$ ^[13]

类似可得 $m([a_0 a_1] \cap P) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (1 - a_2) + m([a_0 a_1 a_2] \cap P) \dots$ ^[13]

因此有 $m(p) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} (1 - a_i)$ ^[13]

考察 Q :

当 $b_1 = 0$ 时, $Q = [b_0 b_1] \cap Q$, 这时 $m(Q) = m([b_0 b_1] \cap Q)$ ^[13]

当 $b_1 = 0$ 时, $Q = ([b_0 0] \cap M_1) \cup ([b_0 b_1] \cap Q), m(Q) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m([b_0 b_1] \cap Q)$ ^[13]

因此有 $m(Q) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 b_1 + m([b_0 b_1] \cap Q)$ ^[13]

类似可得 $m([b_0 b_1] \cap Q) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 b_2 + m([b_0 b_1 b_2] \cap Q) \dots$ ^[13]

故 $m(Q) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 b_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 b_2 + \dots$, 因而 $m(\varnothing^{-1}|_{M_1}(A \cap M_2)) = m(p) + m(Q) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b_1 - a_1) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (b_2 - a_2) + \dots = L(A \cap M_2)$ ^[13]

当 $A = [0, b]$ 时, 类似可证^[13]故 $\varnothing|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_2$ 是保测的^[13]

2) $(\varnothing|_{M_1})^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ 是保测的

设 D 是 $\bullet$ 的所有柱形之集, 则 $D \cap M_1$ 是生成 $B(\bullet) \cap M_1$ 的一个半代数^[13]

$\forall B = [x_0 x_1 \dots x_n] \cap M_1 = D \cap M_1, (\varnothing|_{M_1})^{-1-1}(B) = \varnothing|_{M_1}(B) = \left\{x \in I \cap M_2 \mid \frac{x_0}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{x_0}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} \dots\right\}$ ^[13]

于是 $L(\varnothing|_{M_1}(B)) = 1/2^{n+1} = m(B)$ ^[13]

引理 4 设 λ 是 $I \rightarrow I$ 的帐篷映射, T 是 $\bullet \rightarrow \bullet$ 上的如前定义的映射, 则 T 与 λ 共轭⁽¹³⁾

证明 由结论 1 ~ 6、引理 1 ~ 3 及 [2] 中定义 2.4 知, $T \simeq \lambda$ ⁽¹³⁾

定理 设 $(I, B(I), L)$ 如前定义, λ 是 $I \rightarrow I$ 上的帐篷映射, 则 λ 是强混合的保测变换⁽¹³⁾

证明 由引理 2 及引理 4 知定理成立⁽¹³⁾

注: 其他帐篷类映射的强混合性类似可证⁽¹³⁾

感谢熊金城教授的指导!

[参 考 文 献]

- [1] 熊金城, 陈二才¹⁹ 强混合的保测变换引起的混沌[J]¹⁹ 中国科学(A), 1996, (26): 961 ~ 967¹⁹.
 [2] Walter P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York: Springer-Verlog, 1982.

Strong-Mixing Property of the class of the Tent Mapping of the Interval

WANG Huo-yun¹, LU Jian-ping²

(¹. Department of Mathematics, Guangzhou college of Education, Guangzhou 510030, China; ². Basic Courses Department, South China Agriculture Univ. Guangzhou 510631, China)

Abstract: In this paper the class of the tent mapping of the interval is strong-mixing is proved.

Key word: the class of the tent mapping; strong-mixing; Lebesgue measure