

文章编号: 1005-0523(2000) 03-0068-03

亲和数的若干性质与 10 对亲和数

周尚超, 刘二根, 邓毅雄, 徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 给出亲和数的几个性质与优化算法, 计算出 10 对亲和数^[9].

关键词: 数论; 亲和数; 完全数

中图分类号: O973.23

文献标识码: A

0 引言

寻找亲和数是数学中的一个有趣问题, 小于 1 亿的亲和数有 236 对, 但随着数值越大, 这种数对越少; 因而在 60 亿~90 亿之间只有 184 对^[9]文献[6]中也只找到了 90 亿以下的亲和数 1360 对, 目前我们找到了亲和数的几个性质, 并用 TURBOC 2.0 编程语言又找到了 1149 亿~1180 亿的亲和数 10 对^[9].

定义 1 令 $\sigma(x)$ 是 x 的所有因子(含 1 和 x)之和, 如果 $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$, 其中 $a \neq b$, 则称 a 和 b 为亲和数, (如果 $a = b$, 则称 a 为完全数)^[13]例如:

$$\sigma(220) = 1 + 2 + 3 + 4 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 504,$$

$$\sigma(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504, 220 + 284 = 504$$

所以 220 和 284 是亲和数^[13]

定义 2 设 p^t 是 x 的最小素因子, $p^t \mid x, p^{t+1} \nmid x$, 则称 x 是 p^t 类数^[13]

引理 1 如果 m 与 n 互素, 则 $\sigma(mn) = \sigma(m) \times \sigma(n)$ ^[13]特别地, 设 $x = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, 则 $\sigma(x) = \sigma(p_1^{t_1}) \sigma(p_2^{t_2}) \cdots \sigma(p_k^{t_k})$ ^[13]

引理 2 如果 p 为素数, 则 $\sigma(p^n) = 1 + p + \cdots + p^n$ ^[13]特别地, 如果 $m = 2^n$, 则 $\sigma(m) = 2m - 1$.

引理 3 若 $t \bmod 2 = 1$, 则 $\sigma(p^t)$ 是 $1 + p$ 的倍数^[13]特别地, 若 p 为奇数, 则 $\sigma(p^t)$ 是偶数^[13]

引理 4 设 $x = 2^{t_0} p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, 且 $\sigma(x)$ 是奇数, 则 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 都是偶数^[13]

引理 5 $x = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, 则 $\frac{\sigma(x)}{x} > \frac{\sigma(p_i^{t_i})}{p_i^{t_i}}$ ^[13]

引理 6 设 p 是奇数, 则 $\sigma(p^{4m+3})$ 是 4 的倍数^[13]

1 亲和数的若干性质

收稿日期: 1999-10-18; 修订日期: 1999-11-03

基金项目: 江西省自然科学基金课题(3000009702)

作者简介: 周尚超(1948-), 男, 云南蒙自人, 华东交通大学教授^[13]

现已找到的亲和数具有下列特征:

a 与 b 的奇偶性相同;如果 4 整除 a , 则 $\frac{b}{a} < \frac{4}{3}$ 或 $\frac{\sigma(a)}{a} < \frac{7}{3}$, $\frac{\sigma(b)}{b} > \frac{7}{4}$; 大多数亲和数对, a 与 b 的类数相同⁽¹³⁾当 a 小于百万时, 类数不同的有:

$$\begin{aligned} a &= 1\,184 = 32 \times 37, & b &= 1\,210 = 2 \times 5 \times 121; \\ a &= 12\,285 = 27 \times 5 \times 7 \times 13, & b &= 14\,595 = 3 \times 5 \times 7 \times 139; \\ a &= 122\,368 = 512 \times 239, & b &= 12\,3152 = 16 \times 43 \times 179; \\ a &= 141\,664 = 32 \times 19 \times 233, & b &= 153\,176 = 8 \times 41 \times 467; \\ a &= 469\,028 = 4 \times 49 \times 2\,393, & b &= 486\,178 = 2 \times 41 \times 49 \times 121; \\ a &= 879\,712 = 32 \times 37 \times 743 \times, & b &= 901\,424 = 16 \times 53 \times 1\,063^{(13)} \end{aligned}$$

当 a 越大时, 类数不同的越少⁽¹³⁾

以下设 a, b 是亲和数且 $a < b$ ⁽¹³⁾

定理 1 若 a, b 的奇偶性不同, 且 x, y 分别是 a, b 中的奇数与偶数, 则 x 是完全平方数, y 是一个奇完全平方数与 2^n 的积⁽¹³⁾

证明 $\sigma(a) = \sigma(b)$ 是奇数, 由引理 4 可证⁽¹³⁾

定理 2 设 $4 \mid a, a = 2^{p_1} p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$ 中最多只有一个奇数, 如果 t_1 是奇数, 则 t_1 和 p_1 是 $4m+1$ 型数⁽¹³⁾

证明 若 $\frac{b}{a} > \frac{4}{3}$, 则 $\sigma - \frac{a+b}{a} > \frac{7}{3}$, 故 $\frac{\sigma}{b} < \frac{7}{4}$ ⁽¹³⁾

如果 t_1 中有两个奇数, 由引理 3, σ 是 4 的倍数⁽¹³⁾

如果 t_1 中两上奇数, 由引理 3, σ 是 4 的倍数⁽¹³⁾

如果 p_1 是 $4m+3$ 型数, 由引理 3, σ 是 4 倍数⁽¹³⁾

如果 σ 是 4 倍数, 则 $b = \sigma - a$ 是 4 倍数, 由引理 5, $\frac{\sigma}{b} > \frac{\sigma(4)}{b} = \frac{7}{4}$, 矛盾⁽¹³⁾

定理 3 $a \neq 2^{2+3k} 7^{2s+1} p$, 其中 $\gcd(p, 14) = 1$ ⁽¹³⁾

证明 因为 $\sigma(2^{2+3k}) \bmod 7 = 0$, $\sigma(7^{2s+1}) \bmod 8 = 0$, 所以 $\sigma(a)$ 是 56 的倍数, $\frac{\sigma(b)}{b} > 2$, 矛盾⁽¹³⁾

定理 4 $a \neq 2^{3+4k} 5^{2n+1} p$, 其中 $\gcd(p, 10) = 1$ ⁽¹³⁾

证明 因为 $\sigma(2^3) = 15$, $\sigma(a) \bmod 10 = 0$, 所以 $\sigma(a) - a = b \bmod 10 = 0$ ⁽¹³⁾

$\frac{\sigma}{b} \geq 1.8 = \frac{9}{5}$, $\frac{\sigma}{a} \geq \frac{15 \times 6}{8 \times 5} = \frac{9}{4}$, 矛盾⁽¹³⁾

定理 5 $a \neq 2^t 7^{2s+1} p, t \geq 4$.

2 优化算法

根据亲和数的性质, 我们提出如下优化算法:

1) 计算 $\sigma(x)$

a. 果用 $2, 3, \dots, x/2$ 依次除 x , 则算出 $\sigma(x)$ 要作 $x/2$ 次除法, 当 x 很大时, 计算量是很大的;

b. 如果用 $2, 3, \dots, \sqrt{x}$ 依次除 x , 要作 $\sqrt{x}$ 次除法, 计算量也很大;

c. 从最小的素数开始, 依次除 x , 求出 x 的素数分解式 $x = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, 只需计算 $t_1 + t_2 + \dots$

$t_k + k + s$ 次除法, 其中 s 是 $\leq p_k$ 的素数的个数, 因此计算量最小^[13]

2) 分类计算

将数分为奇数类、偶数类^[13]偶数类又分为 2 类、4 类、8 类、...^[13]

文献[2]中^[13]在计算 1 000 亿以上的亲和数对检验 1 亿个数需要 30 小时, 而用分类算法检验 1 亿个数只要 14 小时^[13]

3 10 亲对和数

我们用 TURBOC 2.0 编程语文言找到了 1149 亿~1180 亿的 10 对和数如下:

1) $a=114\ 946\ 106\ 824, b=120\ 423\ 693\ 176$; 2) $a=115\ 471\ 005\ 848, b=126\ 533\ 666\ 152$;
3) $a=115\ 541\ 890\ 552, b=128\ 092\ 631\ 048$; 4) $a=115\ 757\ 118\ 104, b=121\ 130\ 945\ 896$;
5) $a=116\ 128\ 513\ 864, b=127\ 944\ 574\ 136$; 6) $a=116\ 274\ 390\ 808, b=119\ 833\ 481\ 192$;
7) $a=117\ 015\ 118\ 264, b=123\ 574\ 321\ 736$; 8) $a=117\ 580\ 521\ 272, b=120\ 356\ 265\ 928$;
9) $a=117\ 766\ 080\ 296, b=124\ 129\ 727\ 704$; 10) $a=118\ 004\ 457\ 016, b=124\ 278\ 326\ 1384$;

[参 考 文 献]

[1] Ore, Invitation To Number of Theory[M]19.中译本, 有趣的数论, 北京: 北京大学出版社, 1985 .
[2] 周尚超 .15 对亲和数[J]19.华东交通大学学报, 1999, (3) : 66~67 .
[3] 华罗庚 . 数论导引[M]19.北京: 科学出版社, 1979 .
[4] 王 元 . 谈谈素数[M] . 上海: 上海教育出版社, 1978 .
[5] 柯 召, 孙 琦 . 初等数论 100 例[M] . 上海: 上海教育出版社19.1980 .
[6] 周尚超 . 亲和数[J] . 华东交通大学学报, 1998, (4) : 67~68 .

Some Property of Friendly Numbers and
10 Friendly Numbers

ZHOU Shang-chao, LIU Er-gen, DENG yi-xiong, XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Jiangxi Nanchang, 330013)

Abstract: In this paper, we gave some property of friendly numbers and 10 friendly numbers .

Key words: number theory; friendly number; complete number