第 17 卷 第 4 期　　华 东 交 通 大 学 学 报　　Vol.17　No.4
2000 年 12 月　　Journal of East China Jiaotong University　　Dec.　2000

文章编号: 1005-0523(2000)04-0071-05

A-调和型障碍问题最优解的唯一性*

叶玉全，　周树清

(上海交通大学 应用数学系，上海　200240)

摘要： 采用扰动的方法给出了齐次 A-调和型障碍最优控制问题解对控制变量的连续依赖性和最优解的唯一性19.

关　键　词： A-调和；障碍问题；唯一性

中图分类号： O232.1　　　**文献标识码：** A

0　引　言

J Henonen, T Kilpelainen and O Martio 在[3]中给出了 A-调和型障碍问题解一些性质；在 G B Liand O Martio 在[4]中给出了 A-调和型障碍问题解的更高可积性；1998 年 D R Admas 等在[1]中给出了线性椭圆变分不等式的齐次最优控制解的一些必要条件；1999 年陈启宏[2]就状态方程是由一个障碍变分不等式(通过障碍约束)与一个半线性偏微分方程耦合而成的系统进行了研究，得到了该类问题解的存在性和它满足的必要条件19但对拟线性变分不等式还未有这方面的研究19.

本文给出了最优控制问题解对控制变量的连续依赖性，得出当(y, φ)是最优解时，$y = \varphi$及最优解的唯一性，推广了文[1,2]中相应的结果，而且我们证明中并不像[1,2]那样首先要求变分不等式的解唯一，而是最后证明它的唯一性(13)我们考虑的问题如下：

$$\left.\begin{array}{ll} y \in W_0^{1,p}(\Omega) & \\ y \geqslant \varphi & a.e.\ \Omega \\ -\operatorname{div} A(x, \nabla y) \geqslant 0 & a.e.\ \Omega \\ -\operatorname{div} A(x, \nabla y) \cdot (y - \varphi) = 0 & a.e.\ \Omega \end{array}\right\} \tag{1}$$

性能指标：

$$J(\varphi) = \int_\Omega \left\{ \left[\frac{1}{2} T(\varphi) - z \right]^2 + \frac{1}{p} |\nabla \varphi|^p \right\} dx \tag{2}$$

其中：$z \in L^p(\Omega)$是给定值(13)问题(P)：找 $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$，使得

$$J(\varphi) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(\varphi) \tag{3}$$

引进下列假设

(H_1) $\Omega \subset R^n$ 是具有 $C^{1,1}$-边界且有界区域，u 是一可分的完备度量空间(13)

收稿日期： 2000-04-04

基金项目： 国家自然科学基金(19531060)和教育部博士点基金(97024811)

作者简介： 叶玉全(1964-)，男，江西九江人，上海交通大学博士生(13)

(H2) 存在常数 $p>1, 0<\sigma\leqslant 1, \Lambda\geqslant\lambda>0$ 和 $\kappa>0$，对所有的 $x, \hat{x}\in\Omega$, $\zeta, \xi\in R^n$ 满足：

$$\lambda(\kappa+|\zeta|)^{p-2}|\xi|^2\leqslant A_\zeta(x,\zeta)\xi\xi,\quad |A_\zeta(x,\zeta)|\leqslant\Lambda(\kappa+|\zeta|)^{p-2}\tag{4}$$

$$|A(x,\zeta)-A(\hat{x},\zeta)|\leqslant\Lambda(1+|\zeta|)^{p-1}|x-\hat{x}|^\sigma\tag{5}$$

或者：(H2)′ 1) Lipschitz 型不等式：

$$|A(x,\xi)-A(x,\zeta)|\leqslant b|\xi-\zeta|(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}。\tag{6}$$

2) 单调性条件：

$$(A(x,\xi)-A(x,\zeta))(\xi-\zeta)\geqslant a|\xi-\zeta|^2(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}。\tag{7}$$

(3) 齐次性条件：

$$A(x,\lambda\xi)=|\lambda|^{p-2}\lambda A(x,\xi)\tag{8}$$

对 $a.e.\ \forall x\in\Omega$ 和所有的 $\xi,\zeta\in R^{n\times n}$, $\lambda\in R^1$。可以证明(H2)、(H2)′是等价的。

令：$\omega\in K(\varphi)=\{\omega\in W_0^{1,p}\mid\omega\geqslant\varphi\ a.e.$ 在 Ω 中$\}$，那么我们可以定义障碍问题的弱解：

定义 1　给定 $y\in u$ 和 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$，函数 $y\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 称为问题(1)的弱解，如果：

$$\left.\begin{array}{l} y\in K(\varphi)\\ \int_\Omega A(x,\nabla y)\nabla(\omega-y)\,\mathrm{d}x\geqslant 0\end{array}\right\}\tag{9}$$

显然，$K(\varphi)=\{\omega\in W_0^{1,p}(\Omega)\mid\omega\geqslant\varphi\ a.e.$ 在 Ω 中$\}$是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的闭子集。

定义 2　函数 $y\in W_0^{1,p}(\Omega;\mu)$ 称为 $-\mathrm{div}A(x,\nabla y)\geqslant 0$ 上解，且记作 $H^+(\Omega)$，如果：

$$\int_\Omega A(x,\nabla y)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{10}$$

其中 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 且非负。

1　主要结论

假设(H1)-(H2)成立

定理 1.1　y 是(1)的解，y_ε 是扰动问题(16)的解，那么有

1)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|y_\varepsilon-y\|_{W^{1,p}(\Omega)}=0,\ \text{其中}\ y=T(\varphi)\tag{11}$$

2) $y=T(\varphi)$ 是(1)的最小上解，即：

$$y\leqslant\omega\quad a.e.\quad\text{在}\ \Omega\ \text{中},\ \forall\,\omega\in K(\varphi)\cap H^+(\Omega)\tag{12}$$

3) 设 μ 是 Ω 上的 Borel 测度，满足：

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}A(x,\nabla y)=\mu\ \text{in}\ \Omega\\ y|_{\partial\Omega}=0\end{array}\right\}\tag{13}$$

那么 μ 存在、唯一，且有：

$$\mu([y>\varphi])=0。\tag{14}$$

如果 y 是上解且 μ 是具有有限能量的正则的 Borel 测度，满足(14)，那么 y 是(1)的解。

假设 $A(x,\nabla y)=|\nabla y|^{p-2}\nabla y$。我们可得下面结果：

定理 1.2　如果 $y\in W_0^{1,p}$ 是

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}A(x,\nabla y)=(z-y)^+\\ y|_{\partial\Omega}=0\end{array}\right\}\tag{15}$$

的弱解,且使得 $y\leqslant z$ a.e.。那么 y 是问题(P)的最优控制。下面给出一个显然的结果:

推论　假设(H_1)—(H_2)成立,那么 $J(\varphi)$ 在(u,d)上连续。

定理 1.3　假设 φ 是 $-\mathrm{div}A(x,\nabla y)\geqslant 0$ 的上解,则存在问题(P)的唯一的最优控制 $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $y=\varphi$ 且 y 是 $J(y)$ 唯一的极小点。(其中 $J=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{p}|\nabla y|^p\right\}$)

2　主要定理的证明

定理 1.1 的证明　仅证 1) 和 2),3) 的证明参见[3]p61。

1) 设

$$\beta(r)=\begin{cases}0 & 0\leqslant r\leqslant+\infty\\ -r^2 & -\frac{1}{2}\leqslant r<0\\ r+\frac{1}{4} & -\infty\leqslant r<-\frac{1}{2}\end{cases}\tag{16}$$

我们引进扰动问题:

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{div}A(x,\nabla y_\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon-\varphi)=0 \quad x\in\Omega\\ &y_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0; \qquad \varepsilon>0\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

对 $\forall\, v\in K(\varphi)$,有 $\beta(v-\varphi)=0$。从(17)可知

$$\int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\cdot\nabla(v-y_\varepsilon)\,dx=-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\beta(y_\varepsilon-\varphi)(v-y_\varepsilon)\,dx\geqslant 0\tag{18}$$

(事实上,当 $y_\varepsilon<\varphi$ 时,$y_\varepsilon-\varphi<0$,再由 $v\geqslant\varphi\geqslant y_\varepsilon$;当 $y_\varepsilon>\varphi$ 时,$\beta(y_\varepsilon-\varphi)=0$)。

由(18),(H_2)知:

$$\int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\nabla y_\varepsilon\,dx\leqslant\int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\nabla v\,dx\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla y_\varepsilon|^p dx&\leqslant\int_\Omega|\nabla y_\varepsilon|^{p-1}\cdot\nabla v\,dx\\ &\leqslant\left\|\,|\nabla y_\varepsilon|^{p-1}\right\|_{p-1}\|\nabla v\|_p\\ &\leqslant\|\nabla y_\varepsilon\|_p\|\nabla v\|_p\end{aligned}\tag{20}$$

则

$$\|\nabla y_\varepsilon\|_p\leqslant\|\nabla v\|_p\tag{21}$$

取 $v=\varphi$,即为 $\|\nabla y_\varepsilon\|_p\leqslant\|\nabla\varphi\|_p$。

因此,我们可得:在 $L^p(\Omega)$ 中 $\nabla y_\varepsilon\xrightarrow{\omega}\nabla y$,$y_\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon}y$。由(18)知:对 $\forall\,\psi\in W_0^{1,p}(\Omega)$,$\psi\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_\Omega-\beta(y_\varepsilon-\varphi)\psi\,dx\\ &=\varepsilon\int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\nabla\psi\,dx\\ &\leqslant\varepsilon A\int_\Omega|\nabla y_\varepsilon|^{p-1}\nabla\psi\,dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon A\|\nabla y_\varepsilon\|_p\|\nabla \varepsilon\|_p \to 0 \quad (\psi\to 0) \tag{22}$$

因$-\beta(y_\varepsilon-\varphi)\psi\geqslant 0$,那么有:

$$\int_\Omega \beta(y_\varepsilon-\varphi)\psi\,dx = 0 \qquad \forall \psi\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \psi\geqslant 0, a.e.$$

因此有:$\beta(y_\varepsilon-\varphi)=0$,由 β 的定义可知:$y_\varepsilon\geqslant\varphi\ a.e.$,显然有:在 Ω 中

$$y\geqslant\varphi,\ a.e. \tag{23}$$

下证 y_ε 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中强收敛于 y。我们知道:

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla y-\nabla y_\varepsilon|^p dx &\leqslant \int_\Omega|\nabla y-\nabla y_\varepsilon|^2(|\nabla y|+|\nabla y_\varepsilon|)^{p-2}dx\\ &\leqslant C\int_\Omega[A(x,\nabla y)-A(x,\nabla y_\varepsilon)](\nabla y-\nabla y_\varepsilon)dx\\ &\leqslant C\int_\Omega A(x,\nabla y)(\nabla y-\nabla y_\varepsilon)dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{y_\varepsilon>\varphi\}}\beta(y_\varepsilon-\varphi)(y-y_\varepsilon)dx\\ &\leqslant C\int_\Omega A(x,\nabla y)(\nabla y-\nabla y_\varepsilon)dx\to 0\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0)\end{aligned} \tag{24}$$

即 $\|\nabla y-\nabla y_\varepsilon\|_p\to 0$。由此可知在 $W_0^{1,p}$ 中,$y_\varepsilon\xrightarrow{s}y$。(11) 因而得证。

下证 3):由(17)可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon-\varphi)\psi\,dx &= \int_\Omega(-\mathrm{div}A(x,\nabla y_\varepsilon))\psi\,dx\\ &= \int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\leqslant\|\nabla y_\varepsilon\|_p\cdot\|\nabla\psi\|_p\end{aligned} \tag{25}$$

因此,$-\frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon-\varphi)\xrightarrow{weak^*}\mu$,在 $W^{-1,p}$ 中对给定的 φ,$y\equiv T(\varphi)$ 是唯一的,因此 μ 也是唯一的。

接下来我们证明 $\mu[y>\varphi]=0$。

同文[1]有:$\int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon-\varphi)(\varphi-y_\varepsilon)dx=\int_\Omega A(x,\nabla y_\varepsilon)\cdot\nabla(\varphi-y_\varepsilon)dx$。那么,$\int_\Omega(\varphi-y)d\mu=\int_\Omega A(x,\nabla y)\cdot\nabla(\varphi-y_\varepsilon)dx\geqslant 0$。因此立即可得 $\int_\Omega(y-\varphi)d\mu=0$。即:$\mu(y>\varphi)=0$。因

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(x,\nabla y)\cdot(\upsilon-y) &= \int_\Omega(\upsilon-y)d\mu\\ &= \int_{[y=\varphi]}(\upsilon-\varphi)d\mu+\int_{[y>\varphi]}(\upsilon-y)d\mu=\int_{[y=\varphi]}(\upsilon-\varphi)d\mu\geqslant 0。\end{aligned} \tag{26}$$

则 y 是(1)的解。

定理 1.2 的证明

证明:用 $\upsilon-y$ 乘以(15)的两边并分部积分:

$$\int_\Omega\{A(x,\nabla y)\nabla(\upsilon-y)+(y-z)(\upsilon-y)\}dx$$

$$=\int_\Omega\{A(x,\nabla y)\cdot\nabla(\upsilon-y)-(z-y)\cdot(\upsilon-y)\}dx=0 \tag{27}$$

由 J 的严格凸性,那么

$$J(y+\varepsilon(\upsilon-y))<\varepsilon J(\upsilon)+(1-\varepsilon)J(y) \tag{28}$$

即
$$J(\psi)-J(y)>\frac{1}{\varepsilon}\{J(y+\varepsilon(\upsilon-y))-J(y)\} \tag{29}$$

因 J 的极小点是下面方程的解(即欧拉方程):
$$\int_\Omega\{A(x,\nabla y)\cdot\nabla(\upsilon-y)+(y-z)\cdot(\upsilon-y)\}dx=0 \tag{30}$$

根据(29)、(30)知:
$$J(\psi)-J(y)\geqslant 0 \tag{31}$$

命题得证[13]

[参 考 文 献]

[1] D R Adams, S M Lenhart and J Yong. Optimal control of obstacle for elliptic variational inequality[J], Appl. Math. Optim. 1998,(38):121~140.

[2] 陈启宏.变分不等式的间接障碍最优控制问题[D].复旦大学,1999.

[3] J Henonen, T Kilelainen and O Martio, Nolinear potential theory of second order degenerate elliptic parlial differential equations[M]. Oxford University Press,1993.

[4] G B Li and O Martio Local and global integrability of gradients in obstacle problems[M]. Annales Academiae Scientiarum Fennies Series A I Mathematica Volumen, 1994,(19):25~34.

Uniqueness of Optimal Solutions to A-Harmonic Obstacle Optimal Control Problem

YE Yu-quan, ZHOU Shu-qing

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The continuous dependence of solutions on control for obstacle optimal control problem governed by A-harmonic variational inequality is given by perturbation. Existence and uniqueness of optimal solutions is presented.

Key words: A-harmonic; obastcle problem; uniqueness