

文章编号:1005-0523(2001)02-0001-05

远处载荷作用下自由表面附近裂纹问题

陈梦成, 刘平

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 采用连续分布位错模型讨论和分析了受远处载荷下半无限平面自由边界附近任意方位的裂纹问题^[1]。问题求解最后归结为求解一组 Cauchy 型奇异积分方程^[1]。在数值求解这组奇异积分方程中未知位错分布密度近似为基本密度函数与 Chebyshev 多项式之积, 计算表明, 本文方法的数值结果不但收效快而且精度高^[1]。

关键词: 半无限平面; 自由边界; 斜裂纹; 位错法; 应力强度因子

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

0 引言

研究半无限平面自由边界附近裂纹问题要比无限平面内裂纹问题更具实际意义^[1]。这是因为在远离自由边界无限平面内部不大容易诱发裂纹; 另外, 与受均匀应力场区域相比, 有应力集中的地方更容易产生裂纹^[1]。

有关半无限平面内裂纹问题的研究已经有过很多报道, 但所采用的方法多为复变函数法和积分变换法^[1]。这两种方法均需要深厚的数学功底^[1]。本文运用的连续分布位错法(Distributed Dislocation Technique)较前述方法简单, 其基础是利用已有的 Burgers 矢量位错基本解和 Bueckner 定理^[1]。位错分布方法求解裂纹问题虽然早在 50 年代 Eshelby 就已提出, 但直到经过 Erdogan、Dundurs、Keer、Mura 及其他许多学者发展之后才真正成熟, 并在近几年流行起来^[1]。本文打算运用这种新方法分析受远处载荷作用的半无限平面自由边界附近裂纹问题, 以便为将来研究高速列车滚动接触疲劳载荷作用下钢轨表面裂纹及其表面附近剥层裂纹(shelling crack)传播机理打下基础^[1]。

1 问题的描述

本文讨论的问题为平面问题, 用连续分布位错群来描述自由表面附近斜裂纹^[1]。除远处受到拉应力 σ_x^∞ 的作用外, 自由边界表面并未受到任何作用, 如图 1 所示^[1]。

2 问题的基本方程

如图 2(a) 所示, 在半无限平面中, 一个位于 $(0, \eta)$ 且沿 x 方向具有 Burgers 矢量 b_x 的韧性位错在点 (x, y) 产生的应力场可用(1)式表示

$$\sigma_x^d = b_x G_{xxx}(x, y, \eta), \quad \sigma_y^d = b_x G_{xyy}(x, y, \eta), \quad \sigma_{xy}^d = b_y G_{xxy}(x, y, \eta) \quad (1)$$

同样, 如图 2(b) 所示, 一个位于 $(0, \eta)$ 且沿 y 方向具有 Burgers 矢量 b_y 的韧性位错在点 (x, y) 产生的应力场用(2)式表示为

$$\sigma_x^d = b_x G_{yxx}(x, y, \eta), \quad \sigma_y^d = b_y G_{yyy}(x, y, \eta), \quad \sigma_{xy}^d = b_y G_{yxy}(x, y, \eta) \quad (2)$$

(1) 式和(2)式中的 G_{ijk} 为 Green 函数, 一般比较复杂, 它们可通过 Dundurs 和 Mura^[1]的含有一个圆形

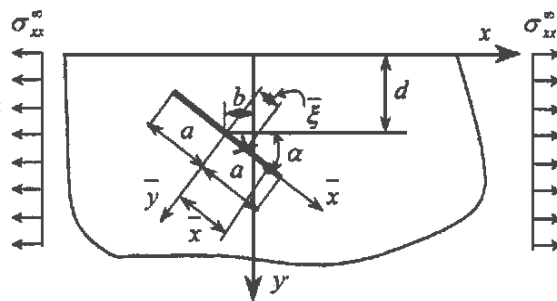


图1 受远场载荷作用的半无限平面自由边界附近裂纹问题示意图

收稿日期:2000-12-03

作者简介:陈梦成(1962-),男,江西高安人,华东交通大学教授^[1]。

夹杂的无限大平面中位错公式得到; G_{ijk} 中的第一个下标表示位错 Burgers 矢量方向, 最后两个下标说明由该位错诱发的应力分量¹⁹.

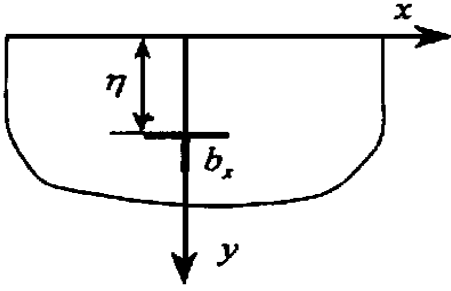


图 2 (a) 半无限平面中沿 x 方向具有 Burgers 矢量 b_x 的韧性位错

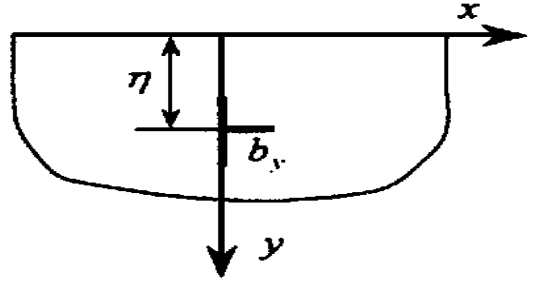


图 2 (b) 半无限平面中沿 y 方向具有 Burgers 矢量 b_y 的韧性位错

裂纹面为自由表面, 即裂纹面上的正应力和剪应力为零¹⁹根据这一点, 进行适当的坐标变换后, 有

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b K_{11}(\bar{x}, \zeta) B_{\bar{x}}(\zeta) d\zeta + \int_{-a}^b K_{12}(\bar{x}, \zeta) B_{\bar{y}}(\zeta) d\zeta &= -\sigma_{yy}^{\infty} \frac{\bar{y}}{y} \\ \int_{-a}^b K_{21}(\bar{x}, \zeta) B_{\bar{x}}(\zeta) d\zeta + \int_{-a}^b K_{22}(\bar{x}, \zeta) B_{\bar{y}}(\zeta) d\zeta &= -\sigma_{xy}^{\infty} \frac{\bar{y}}{y} \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $B_{\bar{x}}(\zeta)$ 、 $B_{\bar{y}}(\zeta)$ 分别是 Burgers 向量的位错分布密度函数, $K_{ij}(\bar{x}, \zeta)$ 是 kernel 函数, 它们分别包括 Cauchy 型奇异部分和非奇异部分, 具体形式为

$$\begin{aligned} K_{11}(\bar{x}, \zeta) &= [G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha + G_{yyy}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \cos^2 \alpha + [G_{xxx}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha + G_{yxx}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \sin^2 \alpha \\ &\quad - 2[G_{xxy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha + G_{xyx}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \sin \alpha \cos \alpha \\ K_{12}(\bar{x}, \zeta) &= [G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha - G_{yyy}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \cos^2 \alpha + [G_{yxx}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha - G_{xxx}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \sin^2 \alpha \\ &\quad - 2[G_{xxy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha - G_{xyx}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha] \sin \alpha \cos \alpha \\ K_{21}(\bar{x}, \zeta) &= \{[G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) - G_{xxx}^*(\bar{x}, \zeta)] \cos \alpha + [G_{yyy}^*(\bar{x}, \zeta) - G_{yxx}^*(\bar{x}, \zeta)] \sin \alpha\} \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + G_{xxy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha + G_{xyx}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ K_{22}(\bar{x}, \zeta) &= \{[G_{yyy}^*(\bar{x}, \zeta) - G_{yxx}^*(\bar{x}, \zeta)] \cos \alpha - [G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) - G_{xxx}^*(\bar{x}, \zeta)] \sin \alpha\} \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + G_{yxy}^*(\bar{x}, \zeta) \cos \alpha - G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G_{xxx}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{xxx}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d), \\ G_{xyy}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{xyy}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d), \\ G_{xxy}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{xxy}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d), \\ G_{yxx}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{yxx}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d), \\ G_{yyy}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{yyy}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d), \\ G_{yxy}^*(\bar{x}, \zeta) &= G_{yxy}((\bar{x} - \zeta \cos \alpha) \bar{x} \sin \alpha + d, \zeta \sin \alpha + d). \end{aligned}$$

无限远处载荷经过坐标换后为

$$\sigma_{yy}^{\infty} = \bar{\sigma}_x^{\infty} \sin^2 \alpha \quad \sigma_{xy}^{\infty} = -\bar{\sigma}_x^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha$$

令 $\bar{x} = at$, $\zeta = as$, 将 (3) 式奇异积分方程化为标准奇异积分方程, 即

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} K_{11}(t, s) B_{\bar{x}}(s) ds + \int_{-1}^{+1} K_{12}(t, s) B_{\bar{y}}(s) ds &= -\bar{\sigma}_x^{\infty} \sin^2 \alpha \\ \int_{-a}^b K_{21}(t, s) B_{\bar{x}}(s) ds + \int_{-a}^b K_{22}(t, s) B_{\bar{y}}(s) ds &= \bar{\sigma}_x^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

为了保证裂纹面上位移间断的单值性, 需要裂纹一端相对于另一端的静位移为零, 即存在下面两个补充方程

$$\int_{-1}^{+1} B_{\bar{x}}(s) ds = 0, \quad \int_{-1}^{+1} B_{\bar{y}}(s) ds = 0 \quad (5)$$

3 奇异积分方程数值方法

本节主要任务就是讨论如何数值求解标准化之后奇异积分方程组(10)和(11)的问题¹⁹未知位错分布密度 $B_{\bar{x}}(s)$ 和 $B_{\bar{y}}(s)$ 根据其在裂纹尖端所表现出的奇异状态可以近似为基本密度函数 $\omega(s)$ 和权函数 $g_i(s)$ ($i = 1, 2$) 之积,即

$$B_{\bar{x}}(s) = \omega(s) g^1(s), \quad B_{\bar{y}}(s) = \omega(s) g^2(s), \quad (6)$$

其中

$$\omega(s) = \frac{1}{1-s^2}, \quad g^1(s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k(s) \quad (7)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{1-s^2}, \quad g^1(s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k(s)$$

式中 $T_k(s)$ 为第一类 Chebyshev 多项式, 定义为

$$T_k(s) = \cos k \theta, \quad s = \cos \theta$$

将(6)式和(7)式代入(4)式和(5)式, 奇异积分方程组的求解问题就归结为确定一组 Chebyshev 多项式系数 a_k 和 b_k 问题¹⁹但是, 根据 Theocaris 和 Ioakimidis^[2]的方法, 奇异积分方程组(4)式和(5)式可用下面一组线性方程组形式来避免具体求解 a_k 和 b_k 值的问题:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} k_{11}(t_i, s_1) g^1(s_1) + h \sum_{j=2}^{n-1} k_{11}(t_i, s_j) g^1(s_j) + \frac{h}{2} k_{11}(t_i, s_n) g^1(s_n) + \\ & \frac{h}{2} k_{12}(t_i, s_1) g^2(s_1) + h \sum_{j=2}^{n-1} k_{12}(t_i, s_j) g^2(s_j) + \frac{h}{2} k_{12}(t_i, s_n) g^2(s_n) = -\bar{\alpha}_x \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (6a)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} k_{21}(t_i, s_1) g^1(s_1) + h \sum_{j=2}^{n-1} k_{21}(t_i, s_j) g^1(s_j) + \frac{h}{2} k_{21}(t_i, s_n) g^1(s_n) + \\ & \frac{h}{2} k_{22}(t_i, s_1) g^2(s_1) + h \sum_{j=2}^{n-1} k_{22}(t_i, s_j) g^2(s_j) + \frac{h}{2} k_{22}(t_i, s_n) g^2(s_n) = \bar{\alpha}_x \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (6b)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n-2}\pi\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad s_j = \cos\left(\frac{j-1}{n-1}\pi\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad h = \frac{\pi}{n-1}$$

补充积分方程(5)相应转化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g^1(s_1) + \sum_{j=2}^{n-1} g^1(s_j) + \frac{1}{2} g^1(s_n) = 0 \\ & \frac{1}{2} g^2(s_1) + \sum_{j=2}^{n-1} g^2(s_j) + \frac{1}{2} g^2(s_n) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$g^1(s_1)$ 和 $g^2(s_j)$ 的值, 可通过求解方程(6)和(7)而得到, 根据 $g^1(\pm 1)$ 和 $g^2(\pm 1)$, 即可计算应力强度因子, 具体表达为

$$K_{\text{I}}(\pm 1) = \pm \frac{2\mu}{(K+1)} \bar{\pi} u_{g^2}(\pm 1), \quad K_{\text{II}}(\pm 1) = \pm \frac{2\mu}{(K+1)} \bar{\pi} u_{g^1}(\pm 1) \quad (8)$$

4 数值结果

4.1 数值解的收敛性

为了检验本文数值方法的收敛性, 我们以远处受单向均匀拉伸、内含一条长为 $2a$ 且与拉伸方向成 α 角裂纹的无限大平面裂纹问题为考核例, 用本文方法计算了不同倾角、取不同多项式项数时的应力强度因子的值¹⁹该问题的精确解, 根据文献[3]有

$$K_{\text{I}} = \bar{\alpha}_x \bar{\pi} \alpha \sin^2 \alpha, \quad K_{\text{II}} = \bar{\alpha}_x \bar{\pi} \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (9)$$

为了比较上的便利, 我们对(8)式和(9)式应力强度因子进行无量纲化, 即

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_x^\infty \sqrt{a}}, \quad F_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma_x^\infty \sqrt{a}} \quad (10)$$

比较结果见表 1 和 2¹⁹。从表中可以看出,本文数值结果在选点数为 40~60 左右就开始收敛,而且精度较高¹⁹。

表 1 无量纲应力强度因子 F_I 的收敛性检验与理论值比较

α n DEG	0	10	30	50	70	90
30	0.00000	0.03605	0.26494	0.60382	0.89413	1.00002
40	0.00000	0.03454	0.26111	0.59947	0.89129	1.00002
50	0.00000	0.03364	0.25885	0.59689	0.88960	1.00002
60	0.00000	0.03305	0.25735	0.59519	0.88849	1.00002
精确解	0.00000	0.03015	0.25000	0.58682	0.88302	1.00000

表 2 无量纲应力强度因子 F_{II} 的收敛性检验与理论值比较

α n DEG	0	10	30	50	70	90
30	0.00000	0.17202	0.44155	0.51251	0.35168	0.03410
40	0.00000	0.17176	0.43937	0.50736	0.34391	0.02551
50	0.00000	0.17161	0.43807	0.50431	0.33932	0.02013
60	0.00000	0.17151	0.43721	0.50229	0.33628	0.01686
精确解	0.00000	0.17101	0.43310	0.49240	0.32139	0.00000

但是,需指出的是,随着裂纹与表面自由边界的夹角 α 的增大,对 I 型应力强度因子 F_I 来说,本文计算结果与精确解的误差减少,而对 II 型应力强度因子 F_{II} 则相反¹⁹。

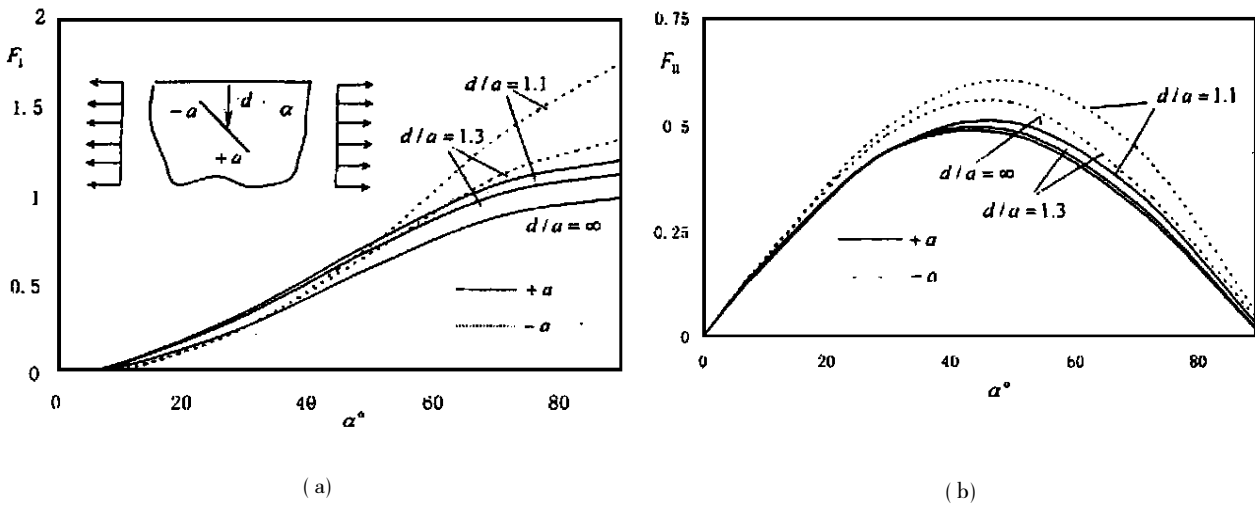


图 3 远处均载荷作用下半无限平面自由边界附近裂纹应力强度因子:a) I 型, b) II 型

4.2 自由边界和裂纹倾角对应力强度因子的影响

图 3(a) 和图 3(b) 分别为半无限平面在远处均布载荷作用下自由边界附近裂纹 I 型和 II 型应力强度因子与裂纹倾斜角 α 的关系曲线¹⁹。从图 3 中可以看出,当裂纹倾斜角 $\alpha=0^\circ$;即裂纹平行于表面自由边界的时候, I 型和 II 型应力强度因子均为零,说明此时远处载荷对裂纹没有影响¹⁹。随着 α 的增大, I 型应力强度因子 F_I 逐渐增大,直至 $\alpha=90^\circ$;即裂纹垂直于表面自由边界时达到最大值,这种现象在靠近半无限平面表面自由边界的裂纹尖端处尤为明显(见图 3(a));但是, II 型应力强度因子 F_{II} 是在 $\alpha=45^\circ \sim 55^\circ$ 的范围内达到最大值,当 $\alpha=90^\circ$ 时,它的值为零¹⁹。从图 3 中还可以看出,裂纹离表面自由边界越近,裂纹尖端应力强度因子所受的影响越大¹⁹。

5 结 论

本文采用位错方法研究了半无限平面自由边界附近任意方向裂纹在远处均布载荷作用下其尖端应力强度因子的分布情况¹⁹。通过分析,我们可以得到以下几点主要结论:

- 1) 提出了未知位错密度可以近似为基本密度函数与 Chebyshev 多项式之积、求解奇异积分方程采用 Lobatto-Chebyshev 求积法的数值方法¹⁹.计算结果表明,该方法在裂纹面上选点数 ≥ 40 的情况下,不但具有良好的收敛性,而且数值结果精度较高;
- 2) 裂纹离半无限平面自由边界越近,裂纹尖端应力强度因子所受的影响越大;
- 3) 当裂纹平行于自由边界时,远处载荷对裂纹没有影响;当裂纹垂直于表面自由边界时,I 型应力强度因子 F_I 达到最大值,而 II 型应力强度因子 F_{II} 是在裂纹与自由边界夹角 $\alpha=45^\circ \sim 55^\circ$ 的范围内达到最大值¹⁹.

参考文献:

[1] Dundurs J, Mura T. Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion[J] Mech. Phys. Solids, 1964, (12) : 177~189 .

[2] Theocaris PS, Ioakimidis N I. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations[J] Quart. Appl. Math. , 1977, (35) : 173~183.

[3] 中国航空研究院 . 应力强度因子手册[Z] . 北京:科学出版社, 1993 .

Fracture Problems Near a Free Boundary of a Half-plane
Subjected to Remote Loading

CHEN Meng-cheng, LIU Ping

(School of Civil Eng. and Arch. , East China Jiaotong Univ. , Nanchang, 330013 China)

Abstract:With a continuously distributed dislocation model, this paper deals with cracks inclined to a free surface of a semi-infinite plane under remote loadings. Solution of the problems reduces to solving a set of Cauchy type singular equations. In the numerical calculations, the unknown density of dislocation is approximated with the product of fundamental function and Chebyshev polynomials. The calculations show the present method yields rapidly converging and high accurate numerical results.

Key words:semi-infinite plane; free boundary; oblique crack dislocation technique; stress intensity factor

简 讯

我校评选出首批学科带头人和学术骨干, 名单如下:

一、学科带头人(1 人)

雷晓燕

二、学术骨干(12 人)

徐保根	蒋先刚	陈梦成	方永忠	徐尤南	洪家娣
周新建	宋京伟	曾佑新	叶仁荪	朱灿焰	陈剑云