

文章编号: 1005-0523(2001)02-0025-05

不可摸数的进一步结果

周尚超, 刘二根, 任飞正

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 给出了一个快速算法, 得到了 10 000~200 000 之间的不可摸数^[19].

关键词: 数论函数; 积性函数; 不可摸数

中图分类号: O156

文献标识码: A

1 不可摸数及算法

本文所指的整数均为非负整数^[19]. Erdos 分别在 1975 及 1979 年提出了不可摸数问题(文献[1]、[2]), 蔺大正给出一个算法, 得到了小于或等于 10 000 的不可摸数, 并且给出了不可摸数($\leq 10\ 000$)的分布规律与相邻 2 个不可摸数之差不小于 40 的不可摸数对^[19].

本文给出了一个快速算法, 得到了 10 000~200 000 之间的不可摸偶数^[19]. 令 $s(n)$ 为整数 n 的所有真因子之和^[13], $x[n]$ 是真因子之和等于 n 的整数的个数^[13]. 例: $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ ^[13], $x[2794] = 9$, 真因子和为 2794 的数是: 3176, 3470, 3716, 3878, 4334, 4658, 4958, 4982, 5582^[13].

定义 1 如果 $x[n] = 0$, 即整数 n 不是任何数的真因子之和, 则称 n 为不可摸数^[13]. 是至今发现的唯一的不可摸奇数. 不可摸奇数与哥德巴赫猜想有关^[13]. 如果偶数 $2m = p + q$, p 与 q 是 2 个不等的素数, 则 $s(pq) = 1 + p + q = 2m + 1$. 我们对不大于 500 000 的偶数进行验证^[13]. 每个 ≥ 8 的偶数都可分解为 2 个不同的素数之和^[13]. 每个 ≥ 100 的偶数至少可分解为 3 对不同的素数之和^[13]. 每个 ≥ 10000 的偶数至少可分解为 91 对不同的素数之和^[13]. 122 有 3 种分解, 10006 有 91 种分解^[13]. 这说明 500 000 以下只有 5 是不可摸数^[13]. 当奇数 $2m + 1$ 的值较大时 $x[2m + 1]$ 的值也较大, 因此较大的奇数是不可摸数的可能性是极小的^[13]. 当 n 为偶数时的 $x[n]$ 值是很小的, 不大于 200 000 的偶数中, $x[n]$ 的最大值是 $x[160154] = 15$;

引理 1 若 $s(n) = m$, 当 n 为偶数时, $n \leq 2m$.

引理 2 若 $s(n) = m$, n 为奇数, m 为偶数, 则 n 必为一个平方数^[13]. 由引理, 设 m 是偶数, $m = s(n)$, 若 n 是偶数, 则 $n \leq 2m$, 若 n 是奇数, 则 $n = k^2$, k 是小于 m 的奇数^[13]. 不可摸偶数的计算相当于 $x[n]$ 的计算^[13]. 要计算不大于 b 的所有不可摸偶数的算法如下^[5]:

1) 设置所有 $x[i] = 0, i \leq b$;

2) 对不超过 $2b$ 的偶数 $k = 2, 4, \dots, 2b$, 计算 $s(k)$; 如果 $s(k) \leq b$, 则令 $x[s(k)]$ 的值加 1;

3) 对每一个不超过 b 的奇数 k , 计算 $s(k^2)$, 若 $s(k^2) \leq b$, 则令 $x[s(k^2)]$ 的值加 1;

问题归结为 $s(n)$ 的计算^[13].

计算 n 的真因子之和, 一般用小于等于 n 的平方根的数去除 n , 如果 $n = 2500$ 亿, 则要做 50 万次除法, 计算量太大^[13]. 如果利用另一个数论函数 $\varphi(n)$, 则可极大地缩小计算量^[13]. $\varphi(n)$ 与 $s(n)$ 的关系是 $s(n) = \varphi(n) - n$; σ 是积性函数:

引理 3 如果 m 与 n 互素, 则 $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$ ^[13].

收稿日期: 2001-01-16

作者简介: 周尚超(1948-), 男, 云南蒙自人, 华东交通大学教授^[13].

引理 4 如果 p 素数, 则 $\sigma(p^n) = 1 + p + \dots + p^n$ (13)

用引理 3、4 计算 $\sigma(n) = \sigma(2^{10} \cdot 5^{12})$ 的过程为, 用最小的素数 $p = 2$ 去除 n , 如除得净令 $n = n/p$, 再用 p 去除 n , 一直到除不尽就换用叫较大的素数去除, 一直除到 n 的值变为 1, 这样计算 $n = 25 \cdot 10^{10}$ 这样大的数的因子和, 只要做 $11 + 1 + 13 = 25$ 次除法就行, 极大地提高了速度(13)

程序算法描述: 用 Delphi 编程, 首先计算出 20 万以下的素数, 存于数组 prime, prime[1] = 2 是第 1 个素数, prime[2] = 3 是第 2 个素数, 等等(19)程序的关键部分是计算数的真因子之和的函数, 以下给出程序中该函数的完整程序:

```
function s0(k: integer): integer;
var m, s, sum, pi: integer;
j, p: integer;
begin
    m := k; s := 1;
    for j := 1 to primeNum do begin
        p := prime[j];
        pi := 1;
        sum := 1;
        while (m mod p) = 0 do begin
            m := m div p;
            pi := pi * p;
            sum := sum + pi;
        end;
        //sum = 1 + p + p^2 + ...
        if sum > 1 then s := s * sum;
        if m = 1 then break;
    end;
    dec(s, k);
    s0 := s;
end; //s
```

2 计算结果

- 1) 200 000 以下的不可摸数 28572 个, 其中只有 5 是唯一的奇数(19).
- 2) 当 $n \leq 200\,000$, n 为偶数, $x[n]$ 的最大值为 $x[160154] = 15$ (13) 以下 15 个数的真因子和为 160154: 152776; 183016; 251614; 260182; 296074; 298234; 302842; 310942; 311086; 312166; 313822; 313966; 315082; 315226; 315262(13) 其次是 $x[111994] = 14$. 以下 14 个数的真因子和为 111994: 139970; 156758; 181922; 206978; 210278; 211682; 213134; 213998; 216698; 217346 218378; 219458; 219938; 219998.

下表给出 x 的值的分布情况

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	36153	21123	8791	3180	1183	485	258	115	67	34	21	13	4	1	1

在 100 000 个偶数中 x 的值为 1 的有 36153 个, 这表明大多数的偶数 n 只有 1 个数 m 使 $s(m) = n$;

- 3) 20 万以下的 28572 个不可摸数的分布如下:

1 到 10000 之间有 1212 个不可摸数 10001 到 20000 之间有 1354 个不可摸数, 从 20001 到 200000 的 18 个区间的不可摸数的个数是 1356, 1402, 1381, 1448, 1433, 1408, 1434, 1435, 1445, 1481, 1444, 1425, 1475, 1498, 1498, 1488, 1462, 1492(13)

- 4) 20 万以下有较大间隔(不小于 40)的不可摸数表(56 对), 最大间隔为 62

相连的 2 个数		间隔	相连的 2 个数		间隔	相连的 2 个数		间隔
5	52	47	56880	56928	48	119532	119576	44
2262	2302	40	57772	57824	52	124660	124708	48
2642	2704	62	59722	59762	40	127368	127410	42
4534	4574	40	61326	61368	42	128808	128848	40
5386	5428	42	68472	68512	40	129884	129930	46
6926	6966	40	68676	68718	42	138546	138592	46
7206	7260	54	71226	71268	42	138612	138652	40
10836	10880	44	71324	71372	48	139286	139326	40
12368	12408	40	74694	74742	48	153252	153298	46
12888	12928	40	87780	87822	42	154056	154104	48
22664	22704	40	88784	88824	40	156106	156146	40
29408	29448	40	94412	94452	40	159012	159056	44
35126	35168	42	95772	95828	56	169902	169942	40
36732	36786	54	96972	97014	42	177906	177960	54
38690	38742	52	103548	103588	40	182570	182616	46
40144	40184	40	105412	105456	44	186136	186176	40
44350	44394	44	106340	106380	40	187310	187356	46
46740	46780	40	110034	110076	42	193188	193232	44
48380	48422	42	113142	113182	40			

5) 190 001－200 000 之间的不可摸数

190006 190010 190020 190036 190044 190046 190050 190056 190070 190072 190074 190076 190078 190080 190082 190084
190086 190088 190110 190112 190116 190120 190126 190146 190152 190164 190166 190168 190178 190188 190194 190212
190214 190224 190232 190236 190238 190242 190248 190256 190258 190288 190290 190292 190296 190306 190308 190318
190326 190328 190346 190348 190362 190376 190378 190382 190384 190398 190400 190402 190414 190416 190422 190428
190432 190436 190438 190440 190442 190448 190460 190462 190464 190466 190478 190480 190484 190488 190494 190498
190502 190506 190516 190520 190548 190550 190552 190560 190562 190564 190566 190568 190590 190596 190598 190602
190612 190620 190622 190632 190648 190654 190656 190664 190674 190676 190690 190692 190694 190696 190698 190704
190706 190716 190724 190728 190732 190736 190740 190742 190746 190750 190758 190782 190792 190798 190800 190802
190818 190820 190848 190850 190852 190854 190856 190862 190864 190866 190870 190876 190880 190882 190884 190888
190896 190900 190906 190908 190918 190926 190928 190930 190934 190938 190940 190942 190944 190946 190962 190964
190966 190972 190976 190978 190986 190992 191004 191006 191012 191014 191016 191018 191026 191038 191054 191064
191076 191082 191088 191104 191112 191132 191148 191150 191152 191154 191156 191158 191160 191168 191172 191180
191182 191186 191196 191204 191206 191208 191216 191220 191224 191226 191242 191244 191246 191248 191260 191266
191272 191274 191286 191292 191296 191304 191312 191324 191334 191336 191346 191348 191352 191360 191364 191366
191370 191376 191378 191382 191384 191388 191390 191392 191394 191396 191398 191400 191408 191410 191418 191428
191430 191466 191472 191480 191490 191496 191502 191514 191516 191518 191526 191528 191550 191556 191560 191572
191574 191576 191588 191590 191592 191598 191608 191612 191616 191618 191620 191646 191648 191650 191652 191662
191676 191682 191684 191686 191712 191714 191716 191732 191734 191762 191766 191768 191770 191772 191780 191796
191798 191800 191810 191814 191824 191826 191842 191844 191846 191848 191852 191856 191868 191870 191880 191884
191888 191892 191908 191910 191918 191920 191928 191934 191936 191940 191942 191944 191948 191960 191966 191968
191974 191982 191988 192006 192012 192018 192020 192022 192024 192042 192058 192062 192068 192070 192072 192080
192082 192086 192088 192090 192102 192108 192110 192112 192132 192146 192156 192178 192180 192200 192222 192224
192226 192238 192244 192248 192268 192270 192276 192286 192302 192304 192312 192332 192352 192360 192372 192396

192398 192400 192402 192406 192412 192414 192416 192422 192430 192438 192454 192456 192468 192482 192486 192488
192490 192492 192496 192504 192512 192516 192522 192534 192544 192566 192576 192580 192592 192594 192596 192598
192600 192624 192636 192648 192652 192654 192656 192660 192666 192688 192690 192692 192702 192708 192712 192720
192734 192748 192756 192766 192774 192778 192786 192796 192798 192810 192822 192828 192832 192852 192864 192866
192882 192896 192898 192900 192902 192906 192908 192912 192928 192942 192946 192948 192954 192956 192958 192960
192968 192976 192990 192996 193000 193008 193020 193024 193026 193028 193030 193042 193056 193064 193068 193080
193086 193090 193092 193098 193100 193102 193104 193108 193112 193116 193122 193128 193130 193138 193152 193160
193170 193172 193188 193232 193234 193236 193242 193252 193254 193256 193258 193260 193266 193272 193278 193280
193298 193300 193308 193310 193312 193314 193316 193320 193322 193326 193332 193334 193336 193372 193400 193408
193412 193414 193416 193420 193430 193440 193446 193458 193460 193468 193476 193480 193484 193498 193502 193506
193512 193528 193530 193532 193536 193538 193548 193556 193568 193570 193572 193582 193584 193590 193596 193616
193624 193626 193628 193630 193632 193640 193646 193648 193656 193660 193668 193672 193678 193686 193688 193690
193692 193698 193702 193710 193712 193716 193718 193746 193750 193756 193768 193778 193782 193788 193808 193822
193824 193828 193832 193840 193854 193856 193868 193882 193890 193896 193900 193904 193910 193912 193914 193916
193924 193926 193928 193962 193964 193968 193970 193972 193976 193986 193988 193998 194002 194010 194012 194014
194016 194022 194032 194034 194036 194038 194042 194046 194048 194052 194056 194064 194066 194068 194082 194106
194108 194110 194126 194128 194138 194156 194160 194164 194176 194178 194184 194192 194196 194202 194214 194218
194220 194224 194228 194230 194232 194236 194244 194246 194250 194256 194276 194280 194282 194286 194288 194290
194300 194304 194306 194308 194332 194334 194336 194338 194340 194348 194360 194362 194376 194388 194396 194400
194408 194420 194428 194430 194438 194448 194454 194460 194462 194466 194470 194492 194496 194498 194502 194512
194514 194516 194526 194532 194538 194548 194556 194558 194560 194562 194564 194574 194580 194588 194590 194596
194600 194602 194606 194624 194630 194640 194664 194668 194698 194700 194702 194706 194728 194740 194742 194746
194754 194762 194766 194778 194780 194782 194792 194796 194798 194802 194808 194824 194832 194844 194850 194876
194880 194884 194916 194922 194926 194932 194942 194946 194950 194952 194962 194970 194976 194988 194996 195004
195006 195008 195012 195020 195022 195036 195060 195062 195068 195100 195102 195112 195114 195120 195126 195142
195148 195150 195152 195156 195168 195170 195172 195178 195182 195186 195188 195190 195202 195208 195212 195216
195222 195226 195228 195236 195238 195240 195248 195250 195252 195264 195270 195286 195292 195298 195300 195306
195308 195326 195336 195348 195350 195352 195366 195368 195374 195380 195382 195384 195396 195398 195400 195406
195420 195422 195436 195442 195452 195456 195462 195464 195468 195476 195478 195484 195488 195492 195502 195504
195506 195510 195516 195524 195532 195536 195538 195546 195550 195552 195560 195566 195568 195572 195588 195598
195612 195618 195622 195624 195626 195634 195636 195648 195650 195652 195654 195656 195664 195668 195672 195682
195684 195702 195708 195714 195716 195718 195720 195728 195750 195758 195774 195780 195786 195796 195800 195806
195816 195828 195830 195832 195838 195840 195842 195848 195850 195856 195860 195862 195876 195882 195892 195900
195904 195906 195912 195924 195928 195938 195942 195944 195948 195950 195958 195960 195964 195982 195984 195986
195990 195996 196014 196018 196020 196028 196032 196038 196050 196062 196068 196070 196072 196080 196086 196092
196096 196098 196108 196122 196124 196130 196132 196144 196146 196152 196156 196158 196166 196168 196176 196192
196198 196208 196210 196212 196214 196220 196222 196230 196238 196244 196256 196260 196266 196268 196270 196296
196298 196316 196328 196330 196336 196342 196344 196350 196352 196356 196358 196360 196362 196374 196376 196384
196392 196396 196400 196402 196406 196412 196416 196434 196438 196446 196448 196450 196452 196464 196470 196472
196476 196482 196486 196488 196490 196508 196512 196528 196530 196532 196536 196548 196554 196560 196566 196572
196578 196592 196596 196604 196610 196612 196620 196622 196628 196630 196632 196642 196648 196654 196670 196672
196676 196680 196692 196698 196706 196716 196722 196726 196734 196764 196766 196776 196780 196788 196790 196796
196806 196808 196810 196836 196848 196850 196852 196862 196864 196868 196870 196878 196884 196888 196892 196896
196898 196900 196916 196926 196932 196938 196940 196942 196946 196966 196968 196974 196976 196984 196986 196988
197000 197008 197022 197028 197032 197048 197050 197056 197058 197076 197088 197096 197106 197108 197112 197122
197134 197136 197142 197166 197172 197174 197180 197188 197190 197202 197212 197214 197218 197220 197238 197248
197252 197268 197288 197310 197318 197320 197322 197326 197328 197346 197356 197358 197364 197368 197388 197394
197396 197406 197408 197410 197428 197446 197458 197460 197462 197468 197472 197490 197496 197520 197528 197532
197538 197544 197550 197556 197558 197566 197586 197588 197590 197606 197616 197634 197640 197656 197660 197666
197668 197670 197676 197688 197694 197698 197710 197722 197724 197726 197728 197730 197734 197736 197746 197748
197752 197766 197772 197792 197796 197800 197802 197814 197820 197824 197830 197846 197848 197850 197852 197864
197866 197868 197874 197876 197886 197898 197914 197940 197944 197952 197978 197980 197982 197984 197992 197994

197998 198000 198002 198024 198026 198040 198042 198052 198056 198066 198068 198072 198108 198114 198134 198144
198146 198156 198160 198162 198166 198172 198188 198190 198192 198206 198210 198212 198228 198232 198236 198238
198240 198246 198250 198264 198272 198288 198290 198292 198294 198300 198308 198310 198320 198336 198342 198358
198360 198366 198368 198372 198382 198384 198386 198390 198402 198404 198422 198424 198426 198432 198446 198448
198456 198468 198474 198484 198486 198488 198496 198502 198508 198516 198520 198522 198524 198528 198538 198546
198548 198550 198560 198562 198564 198568 198576 198584 198588 198606 198608 198612 198618 198620 198628 198630
198652 198664 198668 198678 198682 198684 198688 198696 198708 198710 198714 198718 198728 198738 198740 198756
198760 198768 198776 198780 198782 198784 198786 198800 198802 198808 198822 198838 198848 198856 198864 198866
198868 198876 198880 198888 198894 198908 198912 198928 198948 198950 198958 198964 198984 198986 198990 198996
199002 199012 199014 199028 199044 199062 199068 199072 199074 199076 199080 199092 199128 199132 199134 199142
199160 199164 199168 199170 199180 199186 199188 199190 199192 199198 199200 199204 199218 199224 199228 199232
199236 199238 199242 199252 199254 199260 199266 199272 199280 199282 199284 199288 199296 199302 199306 199308
199310 199312 199318 199326 199328 199330 199336 199342 199348 199352 199362 199366 199372 199386 199392 199422
199434 199436 199440 199446 199452 199462 199468 199470 199474 199478 199496 199506 199510 199512 199518 199530
199532 199536 199542 199548 199552 199556 199566 199572 199580 199582 199592 199598 199616 199618 199620 199632
199646 199650 199652 199662 199664 199686 199694 199696 199702 199704 199708 199710 199712 199718 199728 199748
199758 199760 199762 199764 199766 199782 199788 199792 199794 199806 199824 199826 199830 199836 199838 199840
199848 199862 199866 199868 199872 199896 199900 199902 199908 199916 199918 199920 199940 199944 199946 199956
199958 199972 199974 199976 199988

参考文献:

[1] P·Erdos· Uber die Zahlen der Form $\varphi(n) - n$ and $n - \varphi(n)$ [J]·Elem· Math· 1973; 28~86 .
[2] P·Erdos· Some unconventional Problems in number theory [J]· Asterisque 1979; 73~82 .
[3] Richard K· Guy· Unsolved Problems in Number Theory [M]· Springer-Verlag, New YorkInc,1981 .
[4] 曹珍富· 数论中的问题与结果 [M]· 黑龙江:哈尔滨工业大学出版社,1996,(6) : 56 .
[5] 蒯大正· 关于不可摸数· [J]· 四川工业学院学报,2000,(4) : 82~84 .

The Further Result of Untouchable Numbers

ZHOU Shang-chao, LIU Er-gen, REN Fei-zeng

(School of Natural Science· East China Jiaotong University· Nanchang· 330013,China)

Abstract:In this paper, We gave a fast algorithm,by which we obtained untouchable numbers under 200 000.

Key Words: number-theoretica function; multiplicative function; untouchable numbers