文章编号:1005-0523(2001)02-0030-04

一个通项公式在建立恒等式方面的应用

周学松，　刘二根，　朱惠倩，　李　季

(华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌　330013)

摘要: 利用参考文献[1]中的定理 1 给出组合数的一些新的性质，并推广了参考文献[2]中的一个结果.

关　键　词: 数列;通解式;恒等式

中图分类号: O157.5;　　　**文献标识码:** A

我们在文[1]中得到

引理 1　由递推关系　$(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

$$U_1 = c,\ U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n} \quad n \geqslant 1 \tag{1}$$

给出的数列其通项公式为，(规定; $k < 0$ 时 $\sum_{j=0}^{k} f(j) = 0$)

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} a^{2k-1-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j} a^{2k-2-2j} b^j}{c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j} a^{2k-2-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{k-2} C_{2k-3-j}^{j} a^{2k-3-2j} b^j}, & n = 2k, \\[2ex] \dfrac{c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-j}^{j} a^{2k-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} a^{2k-1-2j} b^j}{c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} a^{2k-1-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j} a^{2k-2-2j} b^j}, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots$$

由文[2]中有

引理 2　a, b 为自然数，由递推关系

$$\begin{cases} F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n & n \geqslant 1 \\ F_1 = 1, \quad F_2 = a \end{cases} \tag{2}$$

产生的序列的通项表达式为

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{L}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{L}}{2}\right)^n\right] \quad (L = a^2 + 4b, \quad n \geqslant 1)$$

引理 3　由(1)产生的数列满足

$$\forall k \in N \qquad U_{2k+1}U_{2k}\cdots U_1 = c\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j} a^{2k-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} a^{2k-1-2j} b^j$$

证　　　$k = 1$ 时

$$U_3U_2U_1 = (aU_2 + b)c = \left(a\left(a + \frac{b}{c}\right) + b\right)c = c(a^2 + b) + ba = c\sum_{j=0}^{1} C_{2-j}^{j} a^{2-2j} b^j + b\sum_{j=0}^{1-1} C_{2-1-j}^{j} a^{2-1-2j} b^j$$

结论成立

假设 $k = m$ 时结论成立，即

收稿日期: 2000-11-15

作者简介: 周学松(1956-)，男，湖北武汉市人，华东交通大学教授.

$$U_{2m+1}U_{2m}\cdots U_1 = c\sum_{j=0}^{m}C_{2m-j}^{j}a^{2m-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m-1}C_{2m-1-j}^{j}a^{2m-1-2j}b^j$$

下面证明 $k = m + 1$ 时结论也成立

$$U_{2m+3}U_{2m+2}U_{2m+1}\cdots U_1 = U_{2m+3}U_{2m+2}\left(c\sum_{j=0}^{m}C_{2m-j}^{j}a^{2m-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m-1}C_{2m-1-j}^{j}a^{2m-1-2j}b^j\right)$$

$$= \frac{c\sum_{j=0}^{m+1}C_{2(m+1)-j}^{j}a^{2(m+1)-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-1-j}^{j}a^{2(m+1)-1-2j}b^j}{c\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-1-j}^{j}a^{2(m+1)-1-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-2-j}^{j}a^{2(m+1)-2-2j}b^j}\cdot$$

$$\frac{c\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-1-j}^{j}a^{2(m+1)-1-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-2-j}^{j}a^{2(m+1)-2-2j}b^j}{c\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-2-j}^{j}a^{2(m+1)-2-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m-1}C_{2(m+1)-3-j}^{j}a^{2(m+1)-3-2j}b^j}\cdot\left(c\sum_{j=0}^{m}C_{2m-j}^{j}a^{2m-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m-1}C_{2m-1-j}^{j}a^{2m-1-2j}b^j\right)$$

$$= c\sum_{j=0}^{m+1}C_{2(m+1)-j}^{j}a^{2(m+1)-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{m}C_{2(m+1)-1-j}^{j}a^{2(m+1)-1-2j}b^j$$

由归纳法知结论成立　　　　(毕)

定理 1　$\forall$ 自然数 a,b,k，$(a^2 + 4b = L \neq 0)$

$$a\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}a^{2k-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{L}}{2}\right)^{2k+2} - \left(\frac{a-\sqrt{L}}{2}\right)^{2k+2}\right)$$

证　由引理 2 中的递推关系(2)可得

$$(n \geqslant 1)\quad F_{n+2}/F_{n+1} = a + \frac{b}{F_{n+1}/F_n}\quad F_1 = 1,\quad F_2 = a \tag{3}$$

取　$U_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$，　则(3)变为

$$U_1 = a,\quad U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n}\quad n \geqslant 1 \tag{4}$$

由(4)及引理 2 知

$$U_{2k+1}U_{2k}\cdots U_1 = F_{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{L}}{2}\right)^{2k+2} - \left(\frac{a-\sqrt{L}}{2}\right)^{2k+2}\right) \tag{5}$$

由(5)及引理 3 立即得证　　　　(毕)

推论：$\forall k \in N \quad \sum_{j=0}^{k-1}3^{2k-1-2j}(13)^j(9C_{2k-j}^{j} + 4C_{2k-1-j}^{j}) = \frac{1}{5}(16^{k+1} - 1) - 3\cdot 4^k$

证　在定理 1 中取 $a = 3, b = 4$ 立即得证．　　　　(毕)

这就是说，利用定理 1 我们可得许多有趣的恒等式[19].

引理 2 中虽然其通解式简洁易记，但仅对自然数 a，b 其结论成立，局限性很大，下面定理 2 给出了由递推关系(2)给出的数列的更一般的通解式[19].

定理 2　设 $a \neq 0, b \neq 0$ 均为实数，则由(2)产生的数列的通解式为

$$F_1 = 1, F_2 = a, F_n = \begin{cases} a\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}a^{2k-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j & n = 2k+2 \quad (6) \\ a\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j & n = 2k+1 \quad (7) \end{cases}\quad k = 1,2,\cdots$$

证　由(5)式及引理 3 立即得证(6)式[19].

仿引理 3 的证明很易证得由(1)产生的数列满足

$$\forall k \in N, U_{2k}U_{2k-1}\cdots U_1 = c\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j + b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}a^{2k-2-2j}b^j.$$

再对(4)式利用该结果并注意

$$F_{2k+1} = U_{2k}U_{2k-1}\cdots U_1$$

立即可得证(7) (毕)

定理 3 若 e 是方程 $x^2-ax-b=0$ 的根,则当 $U_1=e$ 时,由(1)产生的数列是以 e 为常数的常数数列,即 $U_1=e$ 时,$\forall n\geqslant 2\quad U_n=e,\quad (a\neq 0,b\neq 0)$.

证 设 $e=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $U_1=e$, 设 $U_{n-1}=e$,

则 $$U_n=a+\frac{b}{U_{n-1}}=a+\frac{b}{e}=a+\frac{2b}{a+\sqrt{a^2+4b}}=a+\frac{2b(\sqrt{a^2+4b}-a)}{4b}=e$$

同理可证 $e=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$ 的情况 (毕)

定理 4 若 e 是 $x^2-ax-b=0$ 的根,$a\neq 0,b\neq 0$

则 $$e\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}a^{2k-2j}b^j+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^j=e^{2k+1}\quad k\in N$$

证 由定理 3 知

$U_{2k+1}U_{2k}\cdots U_1=e^{2k+1}$,再利用引理 3 即可得证. (毕)

定理 5 $k\in N$, 则

$$(i)\quad \sum_{j=1}^{k}C_{2k-1-j}^{j-1}(-1)^j2^{k-j}=\begin{cases}-1 & k\equiv 1(\bmod 4)\ 或\ k\equiv 2(\bmod 4)\\ 1 & k\equiv 0(\bmod 4)\ 或\ k\equiv 3(\bmod 4)\end{cases}$$

$$(ii)\quad \sum_{j=1}^{k}C_{2k-j}^{j}(-1)^j2^{k-j}=\begin{cases}-1 & k\equiv 2(\bmod 4)\ 或\ k\equiv 3(\bmod 4)\\ 1 & k\equiv 0(\bmod 4)\ 或\ k\equiv 1(\bmod 4)\end{cases}$$

证 因为方程 $x^2-2x+2=0$ 的根 $e=1\pm i$

取 $U_1=1+i$,由定理 4 得

$$(1+i)\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}2^{2k-2j}(-2)^j-2\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}2^{2k-1-2j}(-2)^j=(1+i)^{2k+1}$$

$$\Rightarrow(-1)^k2^k+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j2^{2k-j}(C_{2k-j}^{j}-C_{2k-1-j}^{j})+i\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}2^{2k-j}(-1)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{k}C_{2k+1}^{2j}(-1)^j+i\sum_{j=0}^{k}C_{2k+1}^{2j+1}(-1)^j=2^k\sqrt{2}\cos(2k+1)\frac{\pi}{4}+i2^k\sqrt{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}2^{2k-j}(-1)^j=2^k\sqrt{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}2^{k-j}(-1)^j=\sqrt{2}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}-1,k\equiv 2(mod 4)\ 或\ k\equiv 3(mod 4)\\ 1,k\equiv o(mod 4)\ 或\ k\equiv 1(mod 4)\end{cases}$$

由此得证(ii)

再由 $$2^k\sqrt{2}cos(2k+1)\frac{\pi}{4}=(-1)^k2^k+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j2^{2k-j}(C_{2k-j}^{j}-C_{2k-1-j}^{j})$$

$$=(-1)^k2^k+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j2^{2k-j}C_{2k-1-j}^{j-1}=\sum_{j=1}^{k}C_{2k-1-j}^{j-1}(-1)^j2^{2k-j}$$

仿上可得证(i) (毕)

定理 6 k 为非负整数,则

$$\sum_{j=0}^{k}C_{2k+1}^{2j+1}(-3)^j=4^k\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}(-1)^j$$

证 因为 $e=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 是方程 $x^2-x+1=0$ 的根⒀

取 $U_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$,由定理 4 得

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}(-1)^j-\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}(-1)^j=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2k+1}\qquad(8)$$

而 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}(1+\sqrt{3}i)^{2k+1}$

$$= \frac{1}{2^{2k+1}}(1 + C_{2k+1}^{1}\sqrt{3}i + C_{2k+1}^{2}(\sqrt{3}i)^{2} + C_{2k+1}^{3}(\sqrt{3}i)^{3} + C_{2k+1}^{4}(\sqrt{3})^{4} + C_{2k+1}^{5}(\sqrt{3}i)^{5}$$

$$+ \cdots + C_{2k+1}^{2k}(\sqrt{3}i)^{2k} + C_{2k+1}^{2k+1}(\sqrt{3}i)^{2k+1})$$

$$= \frac{1}{2^{2k+1}}\left(\sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2j}(-3)^{j} + i\sqrt{3}\sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2j+1}(-3)^{j}\right) \qquad (9)$$

由(8)(9)比较 i 前的系数得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2k+1}}\sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2j+1}(-3)^{j}$$

$$\Rightarrow 4^{k}\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j} = \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2j+1}(-3)^{j} \qquad (\text{毕})$$

仿定理5,定理6还可得许许多多有趣的恒等式[19].

定理7　$k \in N$　则(i) $\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}4^{k-j}(-1)^{j} = 2k+1$;(ii) $\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}4^{k-j}(-1)^{j} = 4k$

证　$k=1$ 时,(i),(ii)显然成立[13]

假设　$k=m$ 时结论成立,即

$$\sum_{j=0}^{m-1} C_{2m-1-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j} = 4m;\sum_{j=0}^{m} C_{2m-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j} = 2m+1$$

下面证明 $k=m+1$ 时(i)成立,　$(C_{n+1}^{u} = C_{n}^{u} + C_{n}^{u-1})$

$$\sum_{j=0}^{m+1} C_{2m+2-j}^{j}4^{m+1-j}(-1)^{j} = \sum_{j=0}^{m+1}(C_{2m+1-j}^{j} + C_{2m+1-j}^{j-1})4^{m+1-j}(-1)^{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{m+1}(C_{2m-j}^{j} + C_{2m-j}^{j-1})4^{m+1-j}(-1)^{j} + \sum_{j=0}^{m+1} C_{2m-(j-1)}^{j-1}4^{m-(j-1)}(-1)(-1)^{j-1}$$

$$= 4\sum_{j=0}^{m+1} C_{2m-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j} + \sum_{j=0}^{m+1} C_{2m-1-(j-1)}^{j-1}4^{m-(j-1)}(-1)(-1)^{j-1} - \sum_{j=0}^{m} C_{2m-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j}$$

注意节一个和式中出现 C_{m-1}^{m+1},规定 $C_{k}^{n} = 0, k < n$ 时,

$$= 4\sum_{j=0}^{m} C_{2m-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j} - \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m-1-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j} - \sum_{j=0}^{m} C_{2m-j}^{j}4^{m-j}(-1)^{j}$$

由归纳假设

$$= 3(2m+1) - 4m = 2(m+1) + 1$$

由数学归纳法得证(i)

同理可证(ii)　　　　(毕)

定理8　$k \geqslant 2$ 为整数时,

$$\sum_{j=0}^{k-2} 4^{k-2-j}(-1)^{j}C_{2k-2-j}^{j} = \begin{cases} \frac{k-1}{2}, & k\text{ 为奇数} \\ k/2, & k\text{ 为偶数} \end{cases}$$

证　由定理7得

$$4k - (2k+1) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}4^{k-j}(-1)^{j} - \sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}4^{k-j}(-1)^{j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} 4^{k-j}(-1)^{j}(C_{2k-1-j}^{j} - C_{2k-j}^{j}) = 2k + (-1)^{k} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} 4^{k-1-j}(-1)^{j}(-C_{2k-1-j}^{j-1}) = (2k + (-1)^{k} - 1)\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} 4^{k-2-(j-1)}(-1)^{j-1}C_{2k-2-(j-1)}^{j-1} = \frac{2k + (-1)^{k} - 1}{4}$$

(下转第41页)

参考文献:

[1] R Rackwitz, B Fiessler. Structural Reliability Under Random Load Sequences[J]. Computer and Structures, 1978, Vol. 9: 489～494.

[2] E Paloneimo, M Hannus. Structural Design Based on Weighted Fractiles[J]. Journal of the Structural Division, ASCE, 1974, Vol. 100(7), 378～385.

[3] 赵国藩. 结构可靠度的实用分析方法[J]. 建筑结构学报, 1984, (3): 17～21.

[4] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.

[5] 赵国藩, 王恒栋. 广义随机空间内的结构可靠度实用分析方法[J]. 土木工程学报, 1996, 29(4): 47～51.

A Structural Reliability Method of Simulation Logistic Normal Distribution and Its Application

ZHANG Jun-zhi[1], **LI Gui-qing**[2]

(1. Dept. of Civil Eng. Nanching College of Water Conservancy & Hydroelectric Power, Nanchang 330013, China;
2. Wuhan Univ. of Technology, Wuhan 430070 China)

Abstract: According to the realities of existing engineering structures, the logostic normal distribution is used to described the common variables in the analysis of structural reliability. The checking point method of simulation logistic normal distribution is proposed. The appliation of the logistic normal distribution is demonstrated by the reliability analysis of durability for corrosion of steel reinforcement.

Key words: the existing structure; reliability; the logistic normal distribution; the checking point method; durability

(上接第 33 页)

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-2} 4^{k-2-j}(-1)^j C_{2k-2-j}^{j} = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2}, & k \text{ 为奇数} \\ \dfrac{k}{2}, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

(毕)

参考文献:

[1] 周学松. 一类数列的通项公式及其应用[J]. 华东交通大学学报 2001, (1): 58～61.

[2] 数学手册编写组. 数学手册[Z]. 高等教育出版社, 1979.

[3] 陈景润. 组合数学简介[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983.

The Applications of the General Expression of the Seguence $U_1 = C, U_1 = A + \frac{B}{U_{n-1}}$ on Seting Identical Relation

ZHOU Xue-song, **LIU Er-gen**, **ZU Hui-qian**, **Li-ji**

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013 China)

Abstract: We use the theory 1 in reference[1] geting many identical relations and generate a result given in reference[2].

Key words: Seguence; general expression; identical relation