文章编号:1005-0523(2001)02-0034-03

不分明化理想

蒋志勇

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:使用应明生教授提出的连续值逻辑语义的方法介绍了环的 $F-$ 左、右理想的概念以及它们的一些等价性定义和性质⒀

关 键 词:$F-$ 左理想;$F-$ 右理想;$F-$ 理想

中图分类号:O159;B815.6;O153.3 **文献标识码**:A

0 引 言

L.A.Zudeh 于 1965 年首次提出模糊集的概念以来,国内外的许多拓扑学家象 C.L.Chang,C.K.Wong.B.Hutton.R.Lowen 等及川大的蒲保明和刘应明两位教授将此概念运用于拓扑学的研究工作当中,形成了模糊拓扑这一数学分支学科,取得了显著的成果19近些年来,作为数学的基础分支之一的代数学方面,也有了一些研究成果,譬如模糊半群、模糊群等19本文就是基于应明生教授于九十年代初提出的连续值逻辑语义的方法从模糊逻辑的角度定义了环的 $F-$左理想、$F-$右理想、$F-$理想;同时在此基础上获得了上述有关概念的一些等价性刻划和它们的一些性质⒀当然,本文中出现的有关的逻辑术语、符号以及所有的逻辑公式均源于文献[1]19.

为行文方便,我们总认为 R 是一个分明环19.

1 不分明化理想

定义 1.1 设 R 是-分明环,称一元 $F-$ 谓词 $LI\in \mathcal{F}(\mathcal{F}(R))$、$RI\in \mathcal{F}(\mathcal{F}(R))$、$I\in \mathcal{F}(\mathcal{F}(R))$ 分别为 R 的 $F-$ 左理想,$F-$ 右理想、$F-$ 理想,定义如下

$$LI(A):=FG(A)<(\forall x,y\in R)(y\in A\rightarrow xy\in A)$$
$$RI(A):=FG(A)<(\forall x,y\in R)(x\in A\rightarrow xy\in A)$$
$$I(A):=LI(A)<RI(A)$$

其中 $FG(A)=(\forall x,y\in R)((x\in A)<(y\in A)\rightarrow(x+y\in A)<(-x\in A))$

引理 1.2 设 $A\in\mathcal{F}(R)$,则有

$$\models FG(A)\leftrightarrow(A+A\subseteq A)<(A\subseteq -A)$$

证明 $[(A+A\subseteq A)<(A\subseteq -A)]$

$$=\min(\inf_{x\in R}\min(1,1-\sup_{\substack{y,z\in R\\ y+z=x}}\min(A(y),A(z))+A(x)),\inf_{x\in R}\min(1,1-A(x)+A(-x)))$$
$$=\min(\inf_{x\in R}\inf_{\substack{y,z\in R\\ y+z=x}}\min(1,1-\min(A(y),A(z))+A(x)),\inf_{x\in R}\min(1,1-A(x)+A(-X)))$$
$$=\min(\inf_{y,z\in R}\min(1,1-\min(A(y),A(z))+A(y+z)),\inf_{y\in R}\min(1,1-A(y)+A(-y)))$$
$$=\min(\inf_{y,z\in R}\min(1,1-\min(A(y),A(z))+A(y+z)),\inf_{y,z\in R}\min(1,1-\min(A(y),A((z))+A(-y)))$$

收稿日期:1999-06-01
作者简介:蒋志勇(1966-),男,江西南昌人,华东交通大学讲师19.

$$\inf_{y,z\in R}\min(1,1-\min(A(y),A(z))+\min(A(y+z),A(-y)))=[FG(A)]$$

定理 1.3　对任意的 $A\in \mathcal{F}(R)$,有

1) $\models LI(A)\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(RA\subseteq A)$
$\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(\forall x\in R)(xA\subseteq A)$

2) $\models RI(A)\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(AR\subseteq A)$
$\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(\forall x\in R)(Ax\subseteq A)$

3) $\models I(A)\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(RA\cup AR\subseteq A)$
$\leftrightarrow(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(\forall x,y\in R)((x\in A)\vee(y\in A)\rightarrow(xy\in A))$

证明(1) 由引理 1.2,只需证

$$[(\forall x\in R)(xA\subseteq A)]=[(\forall x,y\in R)(y\in A\rightarrow xy\in A)]=[RA\subseteq A]$$

事实上,$[(\forall x\in R)(xA\subseteq A)]=\inf_{x\in R}\inf_{y\in R}\min(1,1-\sup_{\substack{z\in R\\xz=y}}A(z)+A(y))=\inf_{x,y\in R}\inf_{\substack{z\in R\\xz=y}}\min(1,1-A(z)$
$+A(y))=\inf_{x,z\in R}\min(1,1-A(z)+A(xz))=[(\forall x,y\in R)(y\in A\rightarrow xy\in A)]$

$[(RA\subseteq A)]=\inf_{x\in R}\min(1,1-\sup_{\substack{y,z\in R\\yz=x}}A(z)+A(x))=\inf_{x\in R}\inf_{\substack{y,z\in R\\yz=x}}\min(1,1-A(z)+A(x))$
$=\inf_{y,z\in R}\min(1,1-A(z)+A(yz))=[(\forall x,y\in R)(y\in A\rightarrow xy\in A)]$

(2) 类似于(1)

(3) 由于$[RA\cup AR\subseteq A]=\inf_{x\in R}\min(1,1-\max(\sup_{\substack{y,z\in R\\yz=x}}A(z),\sup_{\substack{u,v\in R\\uv=x}}A(u)+A(x))$

$$=\min(\inf_{x\in R}\min(1,1-\sup_{\substack{y,z\in R\\yz=x}}A(z)+A(X)),\inf_{x\in R}\min(1,1-\sup_{\substack{u,v\in R\\uv=x}}A(u)+A(x)))$$
$$=\min(\inf_{x\in R}\inf_{\substack{y,z\in R\\yz=x}}\min(1,1-A(z)+A(x))\cdot\inf_{x\in R}\inf_{\substack{u,v\in R\\uv=x}}\min(1,1-A(u)+A(x)))$$
$$=\min(\inf_{y,z\in R}\min(1,1-A(z)+A(yz)),\inf_{u,v\in R}\min(1,1-A(u)+A(uv))),$$
$$=\min([RA\subseteq A],[AR\subseteq A])=[(RA\subseteq A)\wedge(AR\subseteq A)]$$

又　$[(\forall x,y\in R)((x\in A)\vee(y\in A)\rightarrow(xy\in A))]$
$$=\inf_{x,y\in R}\min(1,1-\max(A(x),A(y))+A(xy))$$
$$=\min(\inf_{x,y\in R}\min(1,1-A(x)+A(xy)),\inf_{x,y\in R}\min(1,1-A(y)+A(xy)))$$
$$=[(AR\subseteq A)\wedge(RA\subseteq A)]$$

于是　$[LI(A)]=[(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(RA\subseteq A)]$
$[RI(A)]=[(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(AR\subseteq A)]$
$[I(A)]=LI(A)\wedge RI(A)]=[(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(RA\subseteq A)\wedge(AR\subseteq A)]$
$=[(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(RA\cup AR\subseteq A)]$
$=[(A+A\subseteq A)\wedge(A\subseteq -A)\wedge(\forall x,y\in R)((x\in A)\vee(y\in A)\rightarrow(xy\in A))]$

至此,定理证明完成[13]

引理 1.4　对任意 F—子集族 $\{A_i\}_{i\in s}\subseteq \mathcal{F}(R)$,有

$$\models(\forall_i)(i\in s\rightarrow FG(A_i))\rightarrow FG(\bigcap_{i\in s}A_i)$$

证明　$[FG(\bigcap_{i\in s}A_i)]=\inf_{x,y\in R}\min(1,1-\min(\inf_{i\in s}A_i(x),\inf_{i\in s}A_i(y))+\min(\inf_{i\in s}A_i(x+y),\inf_{i\in s}A_i(-x)))$
$=\inf_{x,y\in R}\min(\min(1,1-\min(\inf_{i\in s}A_i(x),\inf_{i\in s}A_i(y))+\inf_{i\in s}A_i(x+y)),\min(1,1-\min(\inf_{i\in s}A_i(x),\inf_{i\in s}A_i(y))$
$+\inf_{i\in s}A_i(-x)))\geqslant\inf_{x,y\in R}\inf_{i\in s}\min(\min(1,1-\min(A_i(x),A_i(x+y)),\min(1,1-\min(A_i(x),A_i(y))$
$+A_i(-x)))$
$=\inf_{i\in s}\inf_{x,y\in R}\min(1,1-\min(A_i(x),A_i(y))+\min(A_i(x+y),A_i(-x)))=\inf_{i\in s}[FG(A_i)]$

定理 1.5　对任意的 F—子集族 $\{A_i\}_{i\in s}\subseteq \mathcal{F}(R)$,有

(1)　$\models(\forall i\in s)(LI(A_i))\rightarrow LI(\bigcap_{i\in s}A_i)$

(2) $\models(\forall i\in s)(RI(A_i))\rightarrow RI(\bigcap_{i\in s}A_i)$

(3) $\models(\forall i\in s)(I(A_i))\rightarrow I(\bigcap_{i\in s}A_i)$

证明(1) 往证 $[(\forall x,y\in R)((y\in\bigcap_{i\in s}A_i)\rightarrow(xy\in\bigcap_{i\in s}A_i))]\geqslant[(\forall i\in s)(\forall x,y\in R)(y\in A_i\rightarrow xy\in A_i)]$

事实上，$[(\forall x,y\in R)((y\in\bigcap_{i\in s}A_i\rightarrow xy\in\bigcap_{i\in s}A_i))]$

$$=\inf_{x,y\in R}\min(1,1-\inf_{i\in s}A_i(y)+\inf_{i\in s}A_i(xy))$$

$$\geqslant\inf_{x,y\in R}\inf_{i\in s}\min(1,1-A_i(y)+A_i(xy))=\inf_{i\in s}\inf_{x,y\in R}\min(1,1-A_i(y)+A_i(xy))$$

$$=[(\forall i\in s)(\forall x,y\in R)(y\in A_i\rightarrow xy\in A_i)]$$

于是，由引理1.4可得

$$[LI(\bigcap_{i\in s}A_i)]\geqslant\inf_{i\in s}\min([FG(A_i)],[(\forall x,y\in R)(y\in A_i\rightarrow xy\in A_i)])=\inf_{i\in s}[LI(A_i)]$$

(2) 类似于(1)

(3) 根据定义1.1及(1)、(2)即可获证19.

定理1.6 设f是分明环R到Q的满同态，则对任何的$A\in\mathcal{F}(R)$，$B\in\mathcal{F}(Q)$，有

$\models I(A)\rightarrow I(f(A))$

$\models I(B)\leftrightarrow I(f^{-1}(B))$

推论 若f为分明环R到Q的满同态，则对任何的$A\in\mathcal{F}(R)$，$B\in\mathcal{F}(Q)$，有

另外，从定理1.6的证明过程易得到如下的

1) a) $\models LI(A)\rightarrow LI(f(A))$

b) $\models RI(A)\rightarrow RI(f(A))$

2) a) $\models LI(B)\leftrightarrow LI(f^{-1}(B))$

b) $\models RI(B)\leftrightarrow RI(f^{-1}(B))$

参考文献：

[1] M S Ying. A new approach for fuzzy topology(I)[J]. F S S 39(1991):303～321.

[2] J Z Shen. Ideals and Minimal Ideals in L－semigroup[J]. The Journal of fuzzy Mathematics. 1997, 5(4):935～948

[3] 刘旺金. 不分明代数的基本概念[J]. 四川师大学报, 1980, (2):25～33

[4] 马骥良, 于纯海. Fuzzy 环(1)[J]. 东北师大学报, 1982, (1):23～28

[5] 蒋志勇. 不分明化环. 华东交通大学学报[J]. 2000, (3):71～74.

Fuzzifying Ideals

JIANG Zhi-yong

(School of Natuve Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, We use a semantic method of continuity-valued logic to introduce the notion of left ideals and right ideals and ideals in a ring, and investigate some of their algebraic properties

Key words: F-left ideals; F-right ideals; F-ideals