

文章编号: 1005-0523(2001) 02-0037-05

在役结构可靠度的拟对数正态分布法及其应用

张俊芝¹ 李桂青²

(1. 南昌水利水电高等专科学校 建筑工程系, 江西 南昌 330013; 2. 武汉理工大学 武汉 430070)

摘要: 根据在役工程结构的实际情况, 采用对数正态分布来描述可靠度分析中常遇到的随机变量; 讨论了拟对正态分布的验算点法; 通过对钢筋混凝土钢筋锈蚀的耐久性可靠度分析, 说明了拟对数正态分布法的应用¹⁹。

关 键 词: 在役结构; 可靠度; 对数正态分布; 验算点法; 耐久性

中图分类号: TU 312

文献标识码: A

0 引 言

工程结构设计的主要任务之一是保证设计的结构能够在规定的工作时间内, 在给定的荷载条件下安全、适用地工作¹⁹。设计方法的发展是从单模式到多模式, 从低精度到高精度, 从限制条件较多到普通适用的一个历程¹⁹。

一次二阶矩可靠度分析模型, 自提出之后, 发展很快, 尤其是国际结构安全度委员会(JCSS) 推荐采用的 Rackwitz-Fiessler 法^[1] (即 JC 法), 对一般独立随机变量可靠度问题, 可得到较高精度的近似分析结果¹⁹。为解决非正态随机变量问题, 文献[2]提出“加权分位值法”, 引入设计验算点、灵敏系数及加权分位值等概念, 计算极限状态方程中的验算点与设计参数¹⁹。文献[3]引用文献[2]的某些概念, 将非正态随机变量先行当量正态化, 提出了实用分析法, 比 JC 法简单且精度相差不多; 文献[4]等提出了广大随机空间的概念, 把相关随机变量和广义随机空间相联系, 建议在广义随机空间内进行可靠度分析, 在一定程度上简化了相关随机变量的可靠度分析¹⁹。上述方法, 涉及到非正态分布随机变量的处理时, 都需将其映射或当量正态化处理¹⁹。

本文根据在役工程结构实际情况, 对在役结构可靠度分析中常遇到的各类非对数正态分布随机变量, 采用比正态分布形态更丰富的对数态分布来描述; 讨论了拟对数正态分布验算点法(对应于 JC 法

中的当量正态分布法); 通过对钢筋锈蚀的耐久性可靠度分析, 说明了拟对数正态分布法的应用¹⁹。

1 拟对数正态分布

1.1 拟对数正态分布提出的原因

目前的常用结构可靠性分析方法一般需对非正态分布当量正态化, 再进行可靠度计算¹⁹。正态分布有其计算简单(如可线性运算), 易求出其联合分布等特点¹⁹。但非正态分布当量正态化时, 其等效条件是: 在验算点处, 等效正态分布变量的分布函数与概率密度函数值分别和原变量的相应值相等; 或把原非正态分布变量按对应于失效概率有相同分位值的条件, 用正态分布随机变量来代替, 并要求当量正态化后的均值与原来的非正态变量的均值相等^[1]¹⁹。故所谓的等效指两者的概率密度曲线在某一点重合, 且使两曲线在该点以右(或以左)所围的面积相等¹⁹。

由于正态分布是一种对称性分布, 若随机变量近似服从对称分布时, 用正态分布作等效是与实际相符的, 但实际工程中的变量有可能服从某种偏态分布, 这时可能会产生较大的误差¹⁹。再说, 正太分布在数学上的变量定义域为 $[-\infty, +\infty]$, 但实际工程中许多物理量是非负的, 若原变量的变异系数较大时, 则分布规律应是从 0 处左截尾(实际成截尾正态分布), 可能产生较大误差¹⁹。也有些研究者用威布尔分布(Weibull distribution)等效, 如涉及产品寿命分布时, 由于其形态十分丰富, 有相当灵活的三个分

收稿日期: 2001-01-11

基金项目: 水利部水利开发基金(SJ9710), 学科带头人基金¹⁹。

作者简介: 张俊芝(1963-), 男, 江西婺源人, 南昌水利水电高等专科学校副教授¹⁹。

布参数,可以较好地拟合正态分布、对数正态分布等,但难求得几个威尔分布的联合分布¹⁹。

对数正态分布与正态分布关系密切,只需进行较为方便的变换即可利用正态分布已有的性质,且易求得其联合分布,运算方便¹⁹。并且,对数正态分布的取值区间为非负,与结构工程的变量实际取值区域相符¹⁹。

在役结构的许多变量的均值与方差等,来自于实际量测结果,在数据分析整理时一般难确定其分布规律,此时采用对数正态分布的假定来模拟应该还是比较恰当的¹⁹。因为,无论是一次二阶矩法还是二次二阶矩法,其精度保证的基本前提是,所用变量分布概型是正确的,参数是准确的,但实际上都难做到这一点,而对数正态分布可以在一定程度上消除这一影响¹⁹。因此,本文提出拟对数正态分布法¹⁹。

1.2 拟对数正态分布

X 为对数正态分布时的概率密度函数为

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi\xi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad (0 < x < \infty) \quad (1)$$

式中, $\lambda = E(\ln x)$, $\xi = \sqrt{D \ln x}$ 分别是 $\ln x$ 的均值与标准差, D 为方差⁽¹³⁾

对数正态分布是一中偏态分布,区间为 $(0, \infty)$ ⁽¹³⁾。若已知某变量实测值的均值与方差,则可方便得出其分布函数,即拟对数正态分布函数⁽¹³⁾。由于

$$E(x) = \int_0^{\infty} xf(x) dx \quad (2, a)$$

$$D(x) = \int_0^{\infty} [x - E(x)]^2 dx \quad (2, b)$$

所以,就对数正态分布而言,有

$$\xi = \ln\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 + 1 \quad (3, a)$$

$$\lambda = \ln \mu - \frac{\xi}{2} \quad (3, b)$$

式中, μ 与 σ 分别为该变量的均值和标准差⁽¹³⁾

若已知变量的均值与方差,则可进行拟对数正态分布模拟⁽¹³⁾。由于对数正态分布的上性质,故其对在役结构可靠性分析而言更为有效,因为有些在役结构的构件各变量难确切知道其分布类型⁽¹³⁾。结构可靠性分析中最常用的分布是正态、对数正态及极值 I 型分布,所以,对极值 I 型分布是用正态分布模拟合适,还是用对数正态分布模拟更好是结构可靠度计算精度是否高的比较关键的问题⁽¹³⁾。以下对一个变量(方差比较大)的分布密度函数,用密度函数图形说明这一问题⁽¹³⁾。

例 1 变量 X 的均值和方差分别为 4.0 和 2.0,分析正态分布和对数正态分布对极值 I 型分布的模拟情况

若 X 使用正态分布,则分布函数为 $f_1(x) = 0.2821 \exp\left[-\frac{x-4.0}{4.0}\right]$, (x 的实际区间为 $0 \leq x < \infty$); 而若用对数正态分布模拟,则其密度函数为 $f_2(x) = \frac{1}{0.8603x} \exp\left[-\frac{(\ln x - 1.3274)^2}{0.2356}\right]$, (x 的区间为 $0 < x < \infty$)⁽¹³⁾。而极值 I 型密度函数为 $f_3(x) = 0.9069 \exp\{-0.9069(x - 3.3635) - \exp[-0.9069(x - 3.3635)]\}$, (x 的区间为 $0 \leq x < \infty$)⁽¹³⁾。图 1 表明,对数正态分布比正态分布的模拟要更合适,尤其是变异系数较大的变量,故拟对数正态分布更适合于在役结构可靠度分析⁽¹³⁾。

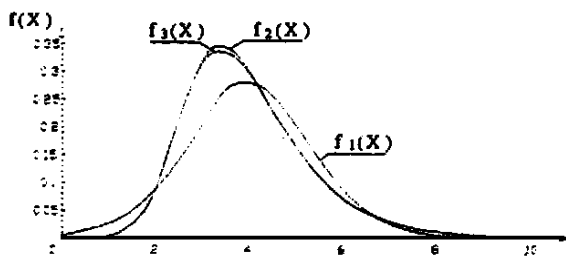


图 1 拟对数正态、正态分布与极值 I 型分布密度函数

2 结构可靠度的拟对数正态分布验算点法

结构构件的极限状态方程可能是非线性,而且随机变量的分布也是多样的⁽¹³⁾。在一次二阶矩理论中,对非线性极限状态方程的处理,则是将非线性极限状态方程在验算点处线性展开,对非正态变量的处理是将其正态化⁽¹³⁾。对于非线性方程的线性展开,研究成果比较充分,在此也按已有成果的基础进行⁽¹³⁾。对于非对数正态变量的处理,则按拟对数正态分布进行,即形成结构可靠度的拟对数正态分布验算点法⁽¹³⁾。

2.1 当量拟对数正态化

“当量拟对数正态化”延引“当量正态化”的概念,条件仍是两个:在设计验算点 x_i^* 处,当量拟对数正态随机变量 X_i' (其平均值为 μ_i , 标准差 σ_i) 的分布函数值 $F_{X_i'}(x_i^*)$ 与原随机变量(其均值为 μ_i , 标准差 σ_i) 的分布函数值 $F_{X_i}(x_i^*)$ 相等;②在设计验算点 x_i^* 处,当量拟对数正态随机变量的概率密度函数值 $f_{X_i'}(x_i^*)$ 与原随机变量概率密度函数值 $f_{X_i}(x_i^*)$ 相等⁽¹³⁾。两个条件的示意图如图 2⁽¹³⁾。

由第一个条件,有 $F_{X_i'}(x_i^*) = F_{X_i}(x_i^*)$, 或

$$\Phi\left\{\frac{\ln x_i^* - \lambda_i'}{\xi_i'}\right\} = F_{X_i}(X_i^*) \quad (4)$$

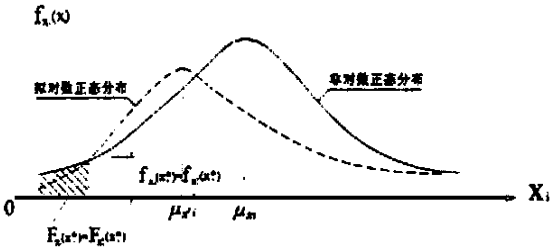


图 2 当量拟对数正态分布条件

由第二个条件,有 $f_{(X_i)}(x_i^*) = f_{(X_i)}(x_i^*)$, 或

$$f_{(X_i)}(x_i^*) = \frac{1}{2\pi\xi_i'} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i^* - \lambda_i'}{\xi_i'}\right)^2\right] \\ = \frac{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]}{\xi_i' x_i^*} = f_{X_i}(x_i^*) \quad (5)$$

即有

$$\frac{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]}{\xi_i' x_i^*} = f_{X_i}(x_i^*) \quad (6)$$

由上式可得

$$\xi_i' = \frac{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]}{x_i^* \cdot f_{X_i}(x_i^*)} = f_{X_i}(x_i^*) \quad (7)$$

将上式代入式(5.4),有

$$\lambda_i' = \ln x_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \frac{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]}{x_i^* \cdot f_{X_i}(x_i^*)} \quad (8)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为其反函数, $\phi(\cdot)$ 是标准正态分布的概率密度函数¹⁹.

式(7)是当量对数正态分布的方差计算公式,即 X_i' 的标准差为 ξ_i' ;式(8)是当量对数正态分布的均值 λ_i' 计算分式¹⁹.

若 X_i 是正态分布,则有

$$\xi_i' = \frac{\sigma_i}{x_i^*} \quad (9)$$

$$\lambda_i' = \frac{\mu_i}{x_i^*} + \ln x_i^* - 1 \quad (10)$$

2.2 可靠度的拟对数正态分布验算点法(JC 法)

与一次二阶矩法相似,设极限状态方程为多个相互独立的随机变量组成,即

$$Z = G(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (11)$$

引入拟对数正态分布随机变量后,方程可表示为

$$Z = g(X_1', X_2', \dots, X_n') = 0 \quad (12)$$

同样按迭代方法,设验算点 $P^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, 有

$$\cos \theta_i' = \frac{-\frac{\partial g}{\partial X_i'} \big|_{P^*} \xi_i'}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \big|_{P^*} \xi_i'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

式中, $\frac{\partial g}{\partial X_i'} \big|_{P^*}$ 是函数 $g(X)$ 对 X_i 的偏导数在 $P^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 点的赋值,同样有

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i' = 1 \quad (13)$$

类似一次二阶矩法,有

$$\ln x_i^* = \lambda_i' + \beta \xi_i' \cos \theta_i' \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

式中, β 为所求可靠指标¹⁹.

按对数正态分布变量求 β 利用下式与式(13)、式(14)联立求解 β 及 x_i^*

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (15)$$

由于验算点 $P^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 待求,所以式(13)和(14)与式(7)和(8)相互制约,只可迭代求 β 值¹⁹.

若极限状态方程为 $Z = R - G - Q = 0$, 则

$$\cos \theta_i' = \frac{-\xi_i'}{\xi_i' + \xi_i' + \xi_i'} \quad (16, a)$$

$$\cos \theta_i' = \frac{-\xi_i'}{\xi_i' + \xi_i' + \xi_i'} \quad (16, b)$$

$$\cos \theta_i' = \frac{-\xi_i'}{\xi_i' + \xi_i' + \xi_i'} \quad (16, c)$$

式中的 R', Q' 和 G' 为当量对数正态化之后的拟对数正态分布变量,而式(14)为

$$\left. \begin{aligned} \ln R^* &= \lambda_R' + \beta \xi_R' \cos \theta_R' \\ \ln G^* &= \lambda_G' + \beta \xi_G' \cos \theta_G' \\ \ln Q^* &= \lambda_Q' + \beta \xi_Q' \cos \theta_Q' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

此时的可靠指标则为

$$\beta = \frac{\lambda_R' - \lambda_G' - \lambda_Q'}{\xi_R' + \xi_G' + \xi_Q'} \quad (18)$$

用拟对数正态分布的验算点法求解,其迭代过程与当量正态化的一次二阶矩法(验算点法)类似¹⁹.

由于对数正态分布拟合其它分布程度一般比正态分布要好,故可以预计的是计算结果要比当量正态化的结果更为精确¹⁹尤其是对于在役结构而言,由于变量的分布类型一般难确切预知,用拟对数正态分布法更合理¹⁹.

例 2 已知极限状态方程 $g(R, S) = R - S$, R 与 S 的均值分别是 100 和 50;变异系数分别为 0.12 和

0.15, 其中 R 为正态分布, S 为对数正态分布¹⁹。

用上述分析的拟对数正态分布方法计算的 β 为 3.4152 (R 与 S 独立时), 数值积分法为 3.3825; 文献[5]中的例 1(当量正态分布的验算点法) 计算结果为 3.2868¹⁹。与积分法相比, 拟对数正态分布法的结果误差为 0.97% (偏大), 而当量正态分布验算点法的误差 (与数值积分法比) 为 2.83% (偏小)¹⁹。

上述拟对数正态分布的验算点法, 是在笛卡尔随机空间内, 使当量对数正态化前、后的随机变量在验算点处具有相同的概率分布函数值和概率密度函数值¹⁹。类似于文献[5]的广义随机空间内的实用算法, 同样可以推广为广义随机空间内的拟对数正态分布实用算法, 其使用的条件也仍可采用当量对数正态化前、后的随机变量对应的失效概率 P_f 或 $1 - P_f$ 有相同的分位值且平均值相等^{[2] 19}。由于算法过程类似, 在此不再讨论, 但可以预计的结论是: 计算精度应比当量正态化的实用算法更高, 只是过程稍为复杂一些而已¹⁹。另外, 也可以类似于广义随机空间验算点法的拟对数正态分布广义随机空间验算点法等¹⁹。在此不现赘述¹⁹。对于在役结构而言, 某些变量的分布类型很难确知, 此时用拟对数正态分布方法是合适的¹⁹。

3 在混凝土结构耐久性分析中的应用

钢筋混凝土结构的耐久性可靠性分析是内容复杂且丰富的研究课题, 涉及的学科多¹⁹。美国混凝土学会 (ACI) 201 委员会将混凝土耐久性破坏的过程概括为^[4]: ①冻融循环; ②化学侵蚀; ③磨蚀; ④钢筋锈蚀; ⑤碱—骨料反应¹⁹。与耐久性有关的随机变量统计参数的观测和统计分析是结构耐久性评估的基础工作, 但当前的诸如碳化深度、氯离子侵蚀深度等实测资料相等缺乏, 因而其变量分布概型, 碳化深度或氯离子锈蚀深度预测等问题都有待进一步研究¹⁹。

钢筋混凝土结构中钢筋的腐蚀机理及主要影响因素比较复杂^[4], 因此, 对钢筋的腐蚀可靠度的分析研究目前还不是很充分¹⁹。文献[4]提出的钢筋腐蚀破坏的三个阶段中, 在 $0 \sim t_1$ 段是结构的安全使用期 (即碳化前沿或氯离子侵蚀到钢筋界面, 达到临界值, 钢筋钝化膜未被破坏); 而 $t_1 \sim t_2$ 段 (即局部腐蚀并使混凝土局部开裂) 及 $t_2 \sim t_3$ 段 (钢筋大面积腐蚀及混凝土大面积开裂, 钢筋腐蚀速度加速而使钢筋截面迅速减小, 使安全性能过低) 的预测是相当困难的¹⁹。

度 (或氯离子侵蚀深度) x 可以调查, 从而可建立其极限状态方程为

$$Z = D - x = 0 \quad (19)$$

式中, D 为混凝土保护层的厚度; x 为碳化 (或氯离子侵蚀) 深度⁽¹³⁾。

最保守的寿命预测或结构使用性能评估应认为 $Z > 0$ 时为结构可靠状态⁽¹³⁾ 而 $Z < 0$ 结构则处于耐久性失效状态⁽¹³⁾。

对于 x 的实测值处理, 文献[4]认均匀锈蚀 (大气环境下) x 近似服从正态分布; 而局部锈蚀 (海洋环境氯离子侵蚀) x 应用极值 I 型分布近似描述¹⁹。但由于前述原因, x 的分布类型还不能完全肯定, 由此, 可用上述拟对数正态分布的优势, 将 x 拟合成对数正态分布, 至于 D , 可按正态分布计算⁽¹³⁾。

例 3 文献[4]给出的例 14.2 中, 某混凝土结构 (港口工程) 在建成 20 年后的检测中, 取得一组氯离子侵蚀最大深度样本为 (40.9, 33.1, 42.6, 50.7, 48.7, 48.6, 45.4, 39.8, 41.5, 44.7, 37.4, 43.2, 35.9) mm, 设混凝土保护层厚度为 45 mm, 服从 $N(45, 5^2)$ (正态分布)⁽¹³⁾。

以对数正态分布模拟最大深度的概率分布, 有 x 的均值 $\mu_x = 41.983$ mm, 标准差 $\sigma_x = 4.863$ mm; 而 $\lambda = 3.731$, $\xi = 0.1155$ ⁽¹³⁾ 则 x 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{3.454}{x} \exp[-37.481(\ln x - 3.731)^2]$$

利用前述的拟对数正态分布验算点法, 求得 $\beta = 0.437$, 结构耐久性失效概率为 $P_f = 0.3311$ ¹⁹。

文献[4]利用线性无偏参数估计法估计位置参数后, 用极值 I 型概型模拟 x 的概率分布, 计算得 $\beta = 0.430$, 相应的 $P_f = 0.3336$ ⁽¹³⁾。若用正态分布模拟 x , 则 $\beta = 0.412$, 相应的 $P_f = 0.3402$ ⁽¹³⁾。结果说明, 用拟对数正态分布法来拟合结构耐久性中的未知参数概型是合适的⁽¹³⁾。

4 结 论

本文分析了对数正态分布的特点, 根据在役工程结构实际情况 (可能原变量的变异系数较大), 对在役结构可靠度分析中常遇到的各类非对数正态分布随机变量, 采用比正态分布形态更丰富的对数正态分布来描述; 讨论了拟对数正态分布验算点法 (对应于 JC 法中的当量正态分布法), 其计算较简单, 且精度更高; 通过对钢筋混凝土钢筋锈蚀的耐久性可靠度分析, 说明了拟对数正态分布法可应用于在役结构可靠性的分析¹⁹。

参考文献:

[1] R Rackwitz, B Fiessler. Structural Reliability Under Random Load Sequences [J]. Computer and Structures, 1978, Vol. 1. 9, 489~494.

[2] E Paloneimo, M Hannus. Structural Design Based on Weighted Fractiles [J]. Journal of the Structural Division, ASCE, 1974, Vol. 100(7), 378~385.

[3] 赵国藩. 结构可靠度的实用分析方法[J]. 建筑结构学报, 1984, (3): 17~21.

[4] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.

[5] 赵国藩, 王恒栋. 广义随机空间内的结构可靠度实用分析方法[J]. 土木工程学报, 1996, 29(4): 47~51.

A Structural Reliability Method of Simulation Logistic Normal Distribution and Its Application

ZHANG Jun-zhi¹, LI Gui-qing²

(1. Dept. of Civil Eng. Nanching College of Water Conservancy & Hydroelectric Power, Nanchang 330013, China;
2. Wuhan Univ. of Technology, Wuhan 430070 China)

Abstract: According to the realities of existing engineering structures, the logostic normal distribution is used to described the common variables in the analysis of structural reliability. The checking point method of simulation logistic normal distribution is proposed. The appliation of the logistic normal distribution is demonstrated by the reliability analysis of durability for corrosion of steel reinforcement.

Key words: the existing structure; reliability; the logistic normal distribution; the checking point method; durability

(上接第 33 页)

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-2} 4^{k-2-j} (-1)^j C_{2k-2-j}^j = \begin{cases} \frac{k-1}{2}, & k \text{ 为奇数} \\ \frac{k}{2}, & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{毕})$$

参考文献:

[1] 周学松. 一类数列的通项公式及其应用[J]. 华东交通大学学报 2001, (1): 58~61.

[2] 数学手册编写组. 数学手册[Z]. 高等教育出版社, 1979.

[3] 陈景润. 组合数学简介[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983.

The Applications of the General Expression of the Segquence $U_1 = C, U_1 = A + \frac{B}{U_{n-1}}$ on Seting Identical Relation

ZHOU Xue-song, LIU Er-gen, ZU Hui-qian, Li-ji

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang, 330013 China)

Abstract: We use the theory ¹ in reference[¹]geting many identical relations and generate a result given in reference[²¹]

Key words: Segquence; general expression; identical relation