文章编号: 1005-0523(2001)03-0034-03

局部刚度修正的快速算法

赵锡钱，　由敬舜

(南昌大学 工程力学研究所 江西 南昌 330029)

摘要: 研究结构局部刚度改变时的结构重分析方法19.结构局部刚度改变问题在结构有限元计算时常会遇到,例如:结构物个别构件的破坏或损伤,构件的局部屈服等等19.本文推导了一种新的算法,利用原结构刚度矩阵的 LDLT 分解因子,通过代数运算获得新结构的解19.该算法的结果是精确且通用的,不仅可用于杆系结构也可用于连续体,而计算量与目前已有的各种与专用近似方法相同19.算例表明,新方法是有效的19.

关 键 词: 结构刚度;刚度局部变更;重分析

中图分类号: TU4　　　**文献标识码:** A

0 引 言

结构局部刚度改变是结构计算中经常遇到的问题,例如:结构物个别构件的破坏或损伤、构件的局部屈服等等19由方程求解过程可知,无论刚度改变涉及的范围大小如何,都需要对结构进行重分析19在许多场合,求解过程中局部刚度不断改变,如果每次都作全结构的重分析,计算效率太低19.为此,人们一直在研究避免每次重分析时都对整个刚度矩阵求逆的快速计算方法,针对一些特殊问题提出了一些快速算法19.在杆系结构方面,Majid,Elloit,Bakri,林潮熙等[1][2][3]提出并改进了杆系结构的更改定理;周岱等给出了一种杆件拆除对空间网架结构影响的实用计算方法[4];在弹塑性、接触分析方面,采用子结构法等19但各种方法都有一定的局限:现有的结构变更定理缺乏通用性,且非精确计算;子结构法一般需要预先知道刚度变更的区域,并要求相关自由度集中编号19.这都限制了它们在一般场合的应用19.

本文给出一种精确算法,它利用原结构刚度矩阵分解结果计算新结构位移,计算结果是精确的19该方法具有通用性,节点编号不受限制,便于编入通用程序19.同时,该算法对刚度变更的发展具有继承性,这特别适合于塑性区扩展,结构破坏过程的计算19.

1 算法

设初始的 n 阶结构刚度方程为

$$[K]\{u\}=\{R\} \tag{1}$$

由于若干单之刚度矩阵改变而使结构刚度矩阵产生增量[牞K],则转的结构刚度方程为

$$([K]+[\Delta K])\{u^*\}=\{R\} \tag{2}$$

这里我们假定 $[K]+[\Delta K]$ 保持为正定,即刚度改变不会使结构变为机动⒀

令 $\{R'\}=\{R\}+\{\Delta R\}$ 表示使新结构产生位移 $\{u\}$ 所需要施加的载荷,即

$$([K]+[\Delta K])\{u\}=\{R'\}=\{R\}+\{\Delta R\} \tag{3}$$

则有

$$\{\Delta R\}=[\Delta K]\{u\} \tag{4}$$

如果能找到 $\{\Delta u\}$ 满足

$$([K]+[\Delta K])\{\Delta u\}=\{\Delta R\} \tag{5}$$

则显然

$$([K][\Delta K])(\{u\}-\{\Delta u\})=\{R\} \tag{6}$$

即

$$\{u^*\}=\{u\}-\{\Delta u\} \tag{7}$$

下面说明 {牞u} 的计算方法19.

因为[牞K]只与局部自由度有关,因此与无关自由度对应的的行列都等于零19若相关自由度数为 m,则去掉全为零元素的行列后[牞K]成为 m 阶的局部修正刚度矩阵[牞K′],并有

$$[\Delta K']=\sum_e[\Delta K^e] \tag{8}$$

收稿日期: 2001-05-17;

作者简介: 赵锡钱(1940-),男,浙江诸暨人,南昌大学教授19.

记 $$[\Delta R'] = \sum_e [\Delta K^e]\{u^e\} \tag{9}$$

$[\Delta R']$ 为 $\{\Delta R\}$ 的紧凑表示(将 0 元素剔除)，上标 e 表示有刚度修改的单元[13]

设 $\{u_i\}$ 表示原结构在 $\{r_i\}$ 作用下产生的位移，则

$$([K]+[\Delta K])\{u_i\} = \{r_i\} + \{\Delta r_i\} \tag{10}$$

$$\{r_i\} + \{\Delta r_i\} = \{r_i\} + \sum_e [\Delta K]\{u^e_i\} \tag{11}$$

若 $\{r_i\}$ 的非 0 分量只出现在有刚度修改的自由度上，则 $\{r_i\}+\{\Delta r_i\}$ 可以写为紧凑形式，记为 $\{\delta'_i\}$，m 个 $\{r_i\}$ 可以产生 m 个矢量 $\{\delta'_i\}$，若这些矢量线性无关，必可求出一组解 $\{\alpha\}$ 满足

$$\{\Delta R'\} = \{\delta'\}\{\alpha\} \tag{12}$$

其中 $[\delta']$ 为由 $\{\delta'_i\}$ 组成的 m 阶矩阵，写成紧凑表示复原的形式为

$$\{\Delta R\} = [\delta]\{\alpha\} \tag{13}$$

上式代入式(5)，并注意到式(10)，显然有

$$\{\Delta u\} = \sum_i \alpha_i \{u_i\} \tag{14}$$

2　$\{r_i\}$ 的选取

为求取 m 个线性无关的矢量 $\{\delta'_i\}$，只需取下列 m 个线性无关矢量 $\{r_i\}$

$$\{r_i\} = [0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0] \qquad i = 1, 2 \cdots m$$

其中分量 1 出现在第 i 个与刚度修改有关的自由度号上[9].

这样选取的 $\{r_i\}$ 可以保证 $\{\delta'_i\}$ $(i = 1, 2\cdots m)$ 线性无关[13]事实上，由 $[K]$ 的正定性和 m 个矢量 $\{r_i\}$ 的线性无关性可以保证 m 个矢量 $\{u_i\}$ 的线性无关，而 m 个矢量 $\{u_i\}$ 的线性无关与 $[K]+[\Delta K]$ 的正定性可以保证 m 个矢量 $\{\delta'_i\}$ 线性无关[13]

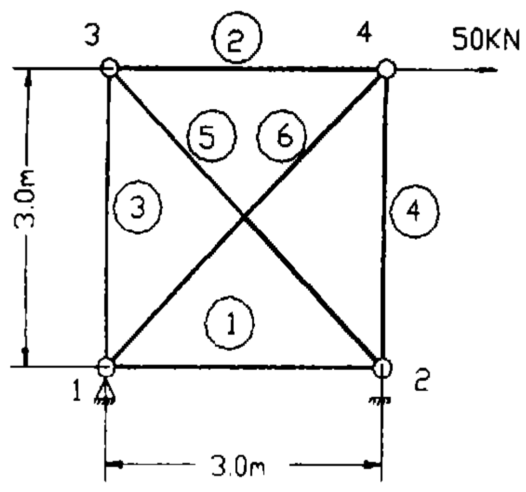

图 1　算例图

3　算例

图 1 结构中各杆的初始拉压刚度均为 $EA = 2.0 \times 10^9 N$，杆 2 的拉压刚度降为 $0.5EA$，用本文的方法计算节点位移[13]

初始刚度(情况 A)的刚度方程

$[K_A]\{u_A\} = \{R\}$

通过计算可得

$$\begin{bmatrix} 0.902 & -0.236 & 0.236 & 0 & 0 \\ -0.236 & 0.902 & -0.236 & -0.667 & 0 \\ 0.236 & -0.236 & 0.902 & 0 & 0 \\ 0 & -0.667 & 0 & 0.902 & 0.236 \\ 0 & 0 & 0 & 0.236 & 0.902 \end{bmatrix} \{u_A\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A}$$

杆 2 刚度减半后(情况 B)的刚度方程

$[K_B]\{u_B\} = \{R\}$

通过计算可得

$$\begin{bmatrix} 0.902 & -0.236 & 0.236 & 0 & 0 \\ -0.236 & 0.569 & -0.236 & -0.333 & 0 \\ 0.236 & -0.236 & 0.902 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.569 & 0.236 \\ 0 & 0 & 0 & 0.236 & 0.902 \end{bmatrix} \{u_B\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B}$$

刚度增量

$$[\Delta K_{AB}] = [K_B] - [K_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.235 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.235 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取单位力基矢

$\{e_1\} = [0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0]^T$

$\{e_2\} = [0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]^T$

求得单位力作用下的位移(单位 CM，下同)

$\{V_1\} = [K_A]^{-1}\{e_1\} = [0.750\quad 3.62\quad 0.750\quad 2.87\quad -0.750]^T$

$\{V_2\} = [K_A]^{-1}\{e_2\} = [0.595\quad 2.87\quad 0.595\quad 3.47\quad -0.905]^T$

计算刚度改变的修正项

$\{\Delta R\} = [\Delta K_{AB}]\{u_A\} = [0\quad 0.097\quad 0\quad -0.097\quad 0]^T$

$\{\Delta e_1\} = [\Delta K_{AB}]\{V_1\} = [0\quad -0.25\quad 0\quad 0.25\quad 0]^T$

$\{\Delta e_2\} = [\Delta K_{AB}]\{V_2\} = [0\quad 0.2\quad 0\quad -0.2\quad 0]^T$

建立计算修正项组合系数的方程

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.2 \\ 0.25 & 0.8 \end{bmatrix} \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} 0.097 \\ -0.097 \end{Bmatrix}$$

解得

$\alpha_1 = 17.636 \qquad \alpha_2 = -17.636$

代入式(14)和(7)得刚度修正后的位移

$$\{u_B\}=\{u_A\}-17.636\{V_1\}+17.636\{V_2\}$$
$$=[0.269 \quad 1.30 \quad 0.269 \quad 1.84 \quad -0.481]^T$$

以上与直接解方程(B)所得结果完全一致(13)

4 结束语

本文给出了一种结构刚度局部修改时的快速重分析方法,该方法具有以下特点:

1) 是一种精确的方法;

2) 方法是通用的,与结构形式无关,因此对局部弹塑性问题、断裂问题等凡是刚度改变限于局部范围的问题都是适用的;

3) 刚度修改的重分析不需要刚度矩阵的重新求逆,重分析计算量与现有的各种特殊计算方法相同(13)但本方法计算具有继承性:对于每个单位力基矢只需求解一次,以后的修正凡与它相关时可重复使用(13)

4) 本方法便于程序实现,很容易加入现有的结构计算程序(13)

参考文献:

[1] K,I,Majid,D W C Elliott·Forceg and Deflexions in Changing Structureg[J]·The Structural Engineer,51,March,1973.

[2] Al Bakri M A E·Optimum Design of Transmission Towers[C]·Ph·D·Thesis,University of Surrey,1978.

[3] 林潮熙 · 空间杆系结构的变更定理及结构性态约束函数导数的计算[J]· 建筑结构学报,1985,4.[4] 周岱,董石麟,赵阳 · 杆件撤除对空间网架结构影响的实用计算方法[J]· 建筑结构学报 .1997.1.

A Fast Analysis Method of the Structures with Local Stiffness Changed

ZHAO Xi-qian, YOU Jing-shun

(Institute of Engineering Mechanic,Nanchang University,Nanchang 330029,China)

Abstract: This paper studied the reanalyzes method of the structure when stiffness changed in local area·The problem often arrived when finite element analyses for the structure with a few components damaged or some elements yield,etc·In this paper,a new solution algorithm is derived,which used the LDLT factors of the stiffness matrix of the old structure with some algebraically calculating·It need not reanalyze the whole new structure,but the result is exact·It takes the same calculation time as the methods that presented in other literature·In addition,the method preaented in this paper is general·It can be used to analyses any type of structure,example,bar's structure system or contimuum problem·The example in this paper shows that the new algorithm is effective in calculating the structure with local stiffness changed·

Keyword: structure stiffness;local stiffness changed;reanalyzes structure stiffness