文章编号:1005-0523(2001)03-0107-06

三正弦不等式及其推广与应用

刘　健

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌　330013)

摘要: 应用大加权三角形不等式给出了涉及三个三角形与一点的三正弦不等式及其推广,并由之推导出一系列新的三角形不等式19.

关 键 词: 三角形;点;不等式

中图分类号: O.178　　　**文献标识码:** A

1　引言与主要结果

在文献[1]中,笔者建立下述有关两个三角形的三元二次动点型不等式:

设 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 与半周长分别为 a, b, c, s,其内部任意一点 P 到三边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1, r_2, r_3,则对 $\triangle A'B'C'$ 与任意实数 x, y, z 有

$$\frac{s-a}{r_1}x^2+\frac{s-b}{r_2}y^2+\frac{s-c}{r_3}z^2 \geqslant 2(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C') \tag{1}$$

等号当且仅当 $A'=\frac{\pi-A}{2}$, $B'=\frac{\pi-B}{2}$, $C'=\frac{\pi-C}{2}$, $x:y:z=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$,且 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立.

应用不等式(1)容易推得二次型不等式:

$$\frac{a}{r_1}x^2+\frac{b}{r_2}y^2+\frac{c}{r_3}z^2 \geqslant 2\left(yz\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+zx\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+xy\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) \tag{2}$$

等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心且 $x=y=z$ 时成立.

另外,由文[2]中的推论2.3还可知成立类似于(1)的下述不等式:

$$\frac{a}{r_1}x^2+\frac{b}{r_2}y^2+\frac{c}{r_3}z^2 \geqslant 4(yz\sin A'+zx\sin B'+xy\sin C') \tag{3}$$

等号当且仅当 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$ 且 $x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$,且 P 为 $\triangle ABC$ 的外心时成立.

不等式(1)、(2)、(3)均是形式优美的二次型不等式,而且可以用来推导许多新的三角形不等式,本文给出不等式(1)、(2)、(3)以下统一的推广:

定理1　对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 与任意实数 x、y、z 及 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$ 有

$$\frac{a}{r_1}x^2+\frac{b}{r_2}y^2+\frac{c}{r_3}z^2 \geqslant 4\left(yz\frac{\sin A_1\sin A_2}{\sin A}+zx\frac{\sin B_1\sin B_2}{\sin B}+xy\frac{\sin C_1\sin C_2}{\sin C}\right) \tag{4}$$

等号当且仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$, $x:y:z=r_1:r_2:r_3=\frac{\sin 2A_1}{\sin A}:\frac{\sin 2B_1}{\sin B}:\frac{\sin 2C_1}{\sin C}$ 时成立.

由于不等式(4)右端含有三个三角形三内角的正弦值,因此称之为三正弦不等式.

在不等式(4)式中作置换: $x\to x\sqrt{\frac{s-a}{a}}$, $y\to y\sqrt{\frac{s-b}{b}}$, $z\to z\sqrt{\frac{s-c}{c}}$,同时令 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A'B'C'$,

收稿日期: 2001-05-10;

作者简介: 刘健(1963-),男,江西兴国人,华东交通大学助理工程师(13)

并取 $A_2 = \frac{\pi - A}{2}, B_2 = \frac{\pi - B}{2}, C_2 = \frac{\pi - C}{2}$，注意到 $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 等，即易得不等式(1).

在(4)式中令 $A_1 = A_2 = \frac{\pi - A}{2}, B_1 = B_2 = \frac{\pi - B}{2}, C_1 = C_2 = \frac{\pi - C}{2}$，则得不等式(2).

另外，在(4)式中令 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$，$\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle A'B'C'$，又得不等式(3).

可见，三正弦不等式(4)统一推广了不等式(1)、(2)、(3).

事实上，应用作者建立的大加权三角形不等式(见[3]中定理5)，我们很容易得到较三正弦不等式(4)更为一般的下述结论：

定理2 设 $\triangle A_iB_iC_i$ 的三边与面积分别为 $a_i, b_i, c_i, \triangle_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，又 x, y, z, u, v, w 与 $u_j, v_j, w_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 均为任意正数；而正数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} q_i = 2(t+1)\ (t > 0)$，非负实数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 与正数 p，t 满足 $\sum_{j=1}^{m} p_j = p - t - 1$，又设 $P_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 $\triangle ABC$ 内部任意 k 个点，P_i 到边 BC, CA, AB 的距离分别记为 $r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} (i = 1, 2, \cdots, k)$，正数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 与正数 t 满足 $\sum_{i=1}^{k} t_i = t$，则

$$\frac{x^p \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i}}{a^t \prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i} \prod_{j=1}^{m} u_j^{p_j}} + \frac{y^p \prod_{i=1}^{n} b_i^{q_i}}{b^t \prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i} \prod_{j=1}^{m} v_j^{p_j}} + \frac{z^p \prod_{i=1}^{n} c_i^{q_i}}{c^t \prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i} \prod_{j=1}^{m} w_j^{p_j}} \geqslant \frac{2^{t+2}(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}p} \prod_{i=1}^{n} \triangle_i^{\frac{1}{2}q_i}}{\triangle^t \prod_{j=1}^{m} (v_jw_j + w_ju_j + u_jv_j)^{\frac{1}{2}p_j}} \tag{5}$$

等号仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \triangle A_nB_nC_n$，$x : y : z = u_j : v_j : w_j = \mathrm{ctg}A_1 : \mathrm{ctg}B_1 : \mathrm{ctg}C_1 (j = 1, 2, \cdots, m)$，且所有点 $P_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 相重合，$r_{11} : r_{12} : r_{13} = \frac{\sin 2A_1}{\sin A} : \frac{\sin 2B_1}{\sin B} : \frac{\sin 2C_1}{\sin C}$ 时成立.

2 定理1与定理2的证明

应用 Cauchy 不等式与重要的 Kooi 不等式，我们可以简捷地证得定理1所述的三正弦不等式，为节省篇幅，我们在此先直接去证明更一般的定理2，然后再由定理2来推导三正弦不等式(4). 为此需要用到两个引理.

引理1[3] 设 $\triangle A_iB_iC_i$ 的三边与面积分别为 $a_i, b_i, c_i, \triangle_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，又 x, y, z, u, v, w 与 $u_j, v_j, w_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 均为任意正数；而正数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} q_i = 2(t+1)\ (t > 0)$，非负实数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 与正数 p，t 满足 $\sum_{j=1}^{m} p_j = p - t - 1$，则

$$\frac{x^p \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i}}{u^t \prod_{j=1}^{m} u_j^{p_j}} + \frac{y^p \prod_{i=1}^{n} b_i^{q_i}}{v^t \prod_{j=1}^{m} v_j^{p_j}} + \frac{z^p \prod_{i=1}^{n} c_i^{q_i}}{w^t \prod_{j=1}^{m} w_j^{p_j}} \geqslant \frac{4^{t+1}(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}p} \prod_{i=1}^{n} \triangle_i^{\frac{1}{2}q_i}}{(u + v + w)^t \prod_{j=1}^{m} (v_jw_j + w_ju_j + u_jv_j)^{\frac{1}{2}p_j}} \tag{6}$$

等号当且仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \triangle A_nB_nC_n$，且 $x : y : z = u_j : v_j : w_j = \mathrm{ctg}A_1 : \mathrm{ctg}B_1 : \mathrm{ctg}C_1 (j = 1, 2, \cdots, m)$，$u : v : w = \sin 2A_1 : \sin 2B_1 : \sin 2C_1$ 时成立.

不等式(6)即被称为大加权三角形不等式，见[4].

引理2 设 $P_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 $\triangle ABC$ 内部任意 k 个点，P_i 到边 BC, CA, AB 的距离分别记为 $r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} (i = 1, 2, \cdots, k)$，正数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 满足 $\sum_{i=1}^{k} m_i = 1$，则

$$a \prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{m_i} + b \prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{m_i} + c \prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{m_i} \leqslant 2\triangle \tag{7}$$

等号当且仅当 $P_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 重合为一点时成立.

不等式(7)显然推广了恒等式 $ar_1 + br_2 + cr_3 = 2\triangle$，应用著名的 Holder 不等式，容易证得(7)，此处从略.

在大加权三角形不等式(6)中，令 $u = a \prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{m_i}, v = b \prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{m_i}, u = c \prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{m_i}$，注意到 $\sum t m_i = t \sum m_i =$

t，再令 $tm_i = t_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 立即可知定理 2 的不等式成立，且按(6) 式等号成立的条件容易确定(5) 等号成立的条件. 定理 2 证毕.

下面，由不等式(5) 来推导不等式(4).

在不等式(5) 中令 $p = 2, t = 1, p_j = 0(j = 1,2,\cdots,m), q_1 = q_2 = 2, k = 1$，点 P_1 与点 P 重合，则 $r_{i1} = r_1, r_{i2} = r_2, r_{i3} = r_3$，从而得

$$\frac{x^2 a_1^2 a_2^2}{ar_1} + \frac{y^2 b_1^2 b_2^2}{br_2} + \frac{z^2 c_1^2 c_2^2}{cr_3} \geqslant 4(yz + zx + xy)\frac{\triangle_1\triangle_2}{\triangle}$$

作置换：$x \to x\frac{a}{a_1a_2}, y \to y\frac{b}{b_1b_2}, z \to z\frac{c}{c_1c_2}$，即得

$$\frac{a}{r_1}x^2 + \frac{b}{r_2}y^2 + \frac{c}{r_1}z^2 \geqslant 8\left(yz\frac{bc}{b_1c_1b_2c_2} + zx\frac{ca}{c_1a_1c_2a_2} + xy\frac{ab}{a_1b_1a_2b_2}\right)\frac{\triangle_1\triangle_2}{\triangle}$$

利用 $\triangle = \frac{1}{2}bc\sin A, \triangle_1 = \frac{1}{2}b_1c_1\sin A_1, \triangle_2 = \frac{1}{2}b_2c_2\sin A_2$，等即得三正弦不等式(4)，且易确定其等号成立的条件.

3　定理1与定理2的应用

前面，我们已经指出由定理1的三正弦不等式(4) 可以很快地推得不等式(1)、(2)、(3)，下面讨论定理1与定理2一些新的应用.

在三正弦不等式(4) 式中取 $x = r_1, y = r_2, z = r_3$，即得

推论 1.1　对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 以及 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$ 有

$$r_2r_3\frac{\sin A_1\sin A_2}{\sin A} + r_3r_1\frac{\sin B_1\sin B_2}{\sin B} + r_1r_2\frac{\sin C_1\sin C_2}{\sin C} \leqslant \frac{1}{2}\triangle \tag{8}$$

其中等号仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$，$r_1$燊$r_2$燊$r_3 = \frac{\sin 2A_1}{\sin A}$燊$\frac{\sin 2B_1}{\sin B}$燊$\frac{\sin 2C_1}{\sin C}$ 时成立.

容易知道，不等式(8) 统一推广了 Gerasimov 不等式[5]：

$$\frac{r_2r_3}{bc} + \frac{r_3r_1}{ca} + \frac{r_1r_2}{ab} \leqslant \frac{1}{4} \tag{9}$$

与 Carlitz－Klamkin 不等式[5]：

$$\frac{r_2r_3}{(s-b)(s-c)} + \frac{r_3r_1}{(s-c)(s-a)} + \frac{r_1r_2}{(s-a)(s-b)} \leqslant 1 \tag{10}$$

以及文[1]中推论13的不等式：

$$r_2r_3\frac{\sin A'}{\sin\frac{A}{2}} + r_3r_1\frac{\sin B'}{\sin\frac{B}{2}} + r_1r_2\frac{\sin C'}{\sin\frac{C}{2}} \leqslant \triangle \tag{11}$$

现设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，令 P 为其外心，则有 $r_1 = R\cos A, r_2 = R\cos B, r_3 = R\cos C$($R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径)，于是由三正弦不等式(4) 可得以下漂亮的涉及三个三角形的三元二次型三角不等式：

推论 1.2　对 锐角 $\triangle ABC$ 与任意 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C$ 与任意实数 x, y, z 有

$$x^2\mathrm{tg}A + y^2\mathrm{tg}B + z^2\mathrm{tg}C \geqslant 2\left(yz\frac{\sin A_1\sin A_2}{\sin A} + zx\frac{\sin B_1\sin B_2}{\sin B} + xy\frac{\sin C_1\sin C_2}{\sin C}\right) \tag{12}$$

等号仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$，$x$燊$y$燊$z = \cos A$燊$\cos B$燊$\cos C$ 时成立.

不等式(12) 显然推广了有许多推论的下述二次型三角不等式[6]：对锐角 $\triangle ABC$ 与任意 $\triangle A'B'C'$ 有

$$x^2\mathrm{tg}A + y^2\mathrm{tg}B + z^2\mathrm{tg}C \geqslant 2(yz\sin A' + zx\sin B' + xy\sin C') \tag{13}$$

在(12) 中取 $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$，则易得

推论 1.3　对 锐角 $\triangle ABC$ 与任意 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C$ 有

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geqslant \frac{\sin A_1\sin A_2}{\sin 2A} + \frac{\sin B_1\sin B_2}{\sin 2B} + \frac{\sin C_1\sin C_2}{\sin 2C} \tag{14}$$

等号仅当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$ 时成立.

易见，(14) 式又推广了文[1] 中有关锐角 $\triangle ABC$ 与任意 $\triangle A'B'C'$ 的不等式：

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant\frac{\sin A'}{\cos A}+\frac{\sin B'}{\cos B}+\frac{\sin C'}{\cos C}\tag{15}$$

在不等式(12)中作置换：$x\to x\operatorname{tg}A$，$y\to y\operatorname{tg}B$，$z\to z\operatorname{tg}C$，同时令$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle A'B'C'$，然后应用[1]中用到的半对称不等式 $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}$，即得优美的二次型不等式：

推论 1.4 对锐角$\triangle ABC$与任意$\triangle A'B'C'$与任意实数x,y,z有

$$x^2\operatorname{tg}^2A+y^2\operatorname{tg}^2B+z^2\operatorname{tg}^2C\geqslant yz\left(\frac{\sin A'}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2+zx\left(\frac{\sin B'}{\sin\frac{B}{2}}\right)^2+xy\left(\frac{\sin C'}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2\tag{16}$$

等号仅当$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$为正三角形且$x=y=z$时成立.

由推论1.4又容易得到以下两个有关一个三角形的二次型不等式：

推论 1.5 对锐角$\triangle ABC$与任意实数x,y,z有

$$\frac{x^2}{\operatorname{ctg}^2A}+\frac{y^2}{\operatorname{ctg}^2B}+\frac{z^2}{\operatorname{ctg}^2C}\geqslant\frac{3}{4}\left(\frac{yz}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{zx}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{xy}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)\tag{17}$$

推论 1.6 对锐角$\triangle ABC$与任意实数x,y,z有

$$x^2\operatorname{tg}^2A+y^2\operatorname{tg}^2B+z^2\operatorname{tg}^2C\geqslant 4\left(yz\cos^2\frac{A}{2}+zx\cos^2\frac{B}{2}+xy\cos^2\frac{C}{2}\right)\tag{18}$$

在不等式(16)中作置换：$x\to\frac{x}{\sin A}$，$y\to\frac{y}{\sin B}$，$z\to\frac{z}{\sin C}$，然后利用 $\sin B\sin C\leqslant\cos^2\frac{A}{2}$ 等，即可得

推论 1.7 对锐角$\triangle ABC$与任意$\triangle A'B'C'$与任意实数x,y,z有

$$\frac{x^2}{\cos^2A}+\frac{y^2}{\cos^2B}+\frac{z^2}{\cos^2C}\geqslant 4yz\left(\frac{\sin A'}{\sin A}\right)^2+4zx\left(\frac{\sin B'}{\sin B}\right)^2+4xy\left(\frac{\sin C'}{\sin C}\right)^2.\tag{19}$$

按三元二次型不等式的"降幂定理"，可知不等式(19)要强于文[1]中推论20的不等式：

$$\frac{x^2}{\cos A}+\frac{y^2}{\cos B}+\frac{z^2}{\cos C}\geqslant 2\left(yz\frac{\sin A'}{\sin A}+zx\frac{\sin B'}{\sin B}+xy\frac{\sin C'}{\sin C}\right)\tag{20}$$

另外，在三正弦不等式(3)中作置换：$x\to x\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$，$y\to y\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}$，$z\to z\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$，然后利用半对称不等式 $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant 4\sin^2A$ 等，即可得

推论 1.8 符号同定理1，则

$$\frac{a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r_1}x^2+\frac{b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{r_2}y^2+\frac{c\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r_3}z^2$$
$$\geqslant 8(yz\sin A_1\sin A_2+zx\sin B_1\sin B_2+xy\sin C_1\sin C_2)\tag{21}$$

由上式又易得

推论 1.9 对$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$内部任意一点P有

$$\sqrt{r_2r_3}\sin A_1\sin A_2+\sqrt{r_3r_1}\sin B_1\sin B_2+\sqrt{r_1r_2}\sin C_1\sin C_2\leqslant\frac{1}{4}(r_a+r_b+r_c)\tag{22}$$

其中r_a,r_b,r_c为$\triangle ABC$相应边上的旁切圆半径.

接下来，我们简略地讨论一下定理2的应用.

在不等式(5)中，令$p=2$，$t=1$，$p_j=0(i=1,2,\cdots,m)$，然后仿照由(5)推导(4)，可得

推论 2.1 设正数$t_1,t_2,\cdots,t_k$满足$\sum_{i=1}^{k}t_i=1$，正数$e_1,e_2,\cdots,e_n$满足$\sum_{i=1}^{n}e_i=2$，则

$$\frac{a}{\prod_{i=1}^{k}r_{i1}^{t_i}}x^2+\frac{b}{\prod_{i=1}^{k}r_{i2}^{t_i}}y^2+\frac{c}{\prod_{i=1}^{k}r_{i3}^{t_i}}z^2\geqslant 4\left(yz\frac{\prod_{i=1}^{n}\sin^{e_i}A_i}{\sin A}+zx\frac{\prod_{i=1}^{n}\sin^{e_i}B_i}{\sin B}+xy\frac{\prod_{i=1}^{n}\sin^{e_i}C_i}{\sin C}\right)\tag{23}$$

等号仅当$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\cdots\triangle A_nB_nC_n$，所有点$P_i(i=1,2,\cdots,k)$相重合，且$x$燊燊$=r_{11}$燊$_{12}$燊$_{13}=$

$\frac{\sin 2A_1}{\sin A}$燊$\frac{\sin 2B_1}{\sin B}$燊$\frac{\sin 2C_1}{\sin C}$ 时成立.

在不等式(5) 中,令 $p = t + 1, p_j = 0(j = 1, 2, \cdots, m), n = 1$, 则

$$\frac{x^{t+1}a_1^{2(t+1)}}{a^t\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}} + \frac{y^{t+1}b_1^{2(t+1)}}{b^t\prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i}} + \frac{z^{t+1}c_1^{2(t+1)}}{c^t\prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i}} \geqslant 2^{t+1}(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}(t+1)}\frac{\triangle_1^{t+1}}{\triangle^t} \tag{24}$$

注意到下述已知的结论:以 $\sqrt{a(s-a)}$, $\sqrt{b(s-b)}$, $\sqrt{c(s-c)}$ 为边长可构成面积为$\frac{1}{2}\triangle$ 的三角形,令上式中的 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等于上述三角形,即得

推论 2.2　设正数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 满足$\sum_{i=1}^{k} t_i = p - 1(p > 1)$,则对任意正数 x, y, z 有

$$\frac{\sqrt{a(s-a)}^{\,p}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}}x^p + \frac{\sqrt{b(s-b)}^{\,p}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}}y^p + \frac{\sqrt{c(s-c)}^{\,p}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}}z^p \geqslant 2(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}p}\triangle \tag{25}$$

等号当且仅当 $x:y:z = \mathrm{tg}\frac{A}{2}:\mathrm{tg}\frac{B}{2}:\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ 且 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 均重合于 $\triangle ABC$ 的内心时成立.

上述结论即为文献[2]中的定理1,这里的推导不同于[2]中的是未用到 Carlitz-Klamkin 不等式(10).

在不等式(5) 中令 $p = t + 2, n = 2, q_1 = t + 2, q_2 = t, m = 1$, 则得

$$\frac{x^{t+1}a_1^{t+2}a_2^t}{u_1a^t\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}} + \frac{y^{t+1}b_1^{t+2}b_2^t}{u_1b^t\prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i}} + \frac{z^{t+1}c_1^{t+2}c_2^t}{u_1c^t\prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i}} \geqslant \frac{2^{t+2}(yz + zx + xy)^{\frac{1}{2}(t+2)}\triangle_1^{\frac{1}{2}(t+2)}\triangle_2^{\frac{1}{2}t}}{\triangle^t\sqrt{v_1w_1 + w_1u_1 + u_1v_1}}$$

接着令 $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle ABC$,再作置换:$x \to \frac{x}{a_1}, y \to \frac{y}{b_1}, z \to \frac{z}{c_1}$, 得

$$\frac{x^{t+2}}{u_1\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}} + \frac{y^{t+2}}{v_1\prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i}} + \frac{z^{t+2}}{w_1\prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i}} \geqslant \frac{2^{t+2}(\frac{1}{2}yz\sin A_1 + \frac{1}{2}\sin B_1 + \frac{1}{2}zx\sin C_1)^{\frac{1}{2}(t+2)}}{\sqrt{v_1w_1 + w_1u_1 + u_1v_1}\,\triangle^{\frac{1}{2}t}} \tag{26}$$

现设 Q 为 $\triangle A'B'C'$内部任意一点,记 $\angle B'QC'$, $\angle C'QA'$, $\angle A'QB'$的补角分别为 α, β, γ,注意到 α, β, γ 可视为一三角形的内角,且有恒等式:

$$\frac{1}{2}QB'\cdot QC'\sin\alpha + \frac{1}{2}QC'\cdot QA'\sin\beta + \frac{1}{2}QA'\cdot QB'\sin\gamma = \triangle'$$

($\triangle'$为 $\triangle A'B'C'$的面积),由不等式(26) 就知

$$\frac{QA'^{t+2}}{u_1\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}} + \frac{QB'^{t+2}}{v_1\prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i}} + \frac{QC'^{t+2}}{w_1\prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i}} \geqslant \frac{2^{t+2}\triangle'^{\frac{1}{2}(t+2)}}{\sqrt{v_1w_1 + w_1u_1 + u_1v_1}} \tag{27}$$

容易证明:对 $\triangle ABC$ 外部任意一点 Q,在 $\triangle ABC$ 内部至少存在一点 P 使得 $QA > PA, QB > PB, QC > PC$ 同时成立. 因此知(26) 对空间任意一点 Q 成立,将(26) 中的 u_1, v_1, w_1 分别换成$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 就得

推论 2.3　设正数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 满足$\sum_{i=1}^{k} t_i = t$,则对 $\triangle A'B'C'$与空间任一点 Q 及正数 x, y, z 有

$$x\frac{QA'^{t+2}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i1}^{t_i}} + y\frac{QB'^{t+2}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i2}^{t_i}} + z\frac{QC'^{t+2}}{\prod_{i=1}^{k} r_{i3}^{t_i}} \geqslant 2^{t+2}\sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}\frac{\triangle'^{\frac{1}{2}(t+2)}}{\triangle^{\frac{1}{2}t}} \tag{28}$$

等号当且仅当 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC, x:y:z = \mathrm{tg}A:\mathrm{tg}B:\mathrm{tg}C$,且 Q 为 $\triangle ABC$ 的垂心,$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 均重合于 $\triangle ABC$ 的外心时成立.

当 $k = 1$ 时,由(28) 就得到文献[3]中推论5.2的不等式.

4　结束语

本文建立的三正弦不等式是一个三元二次型加权不等式,不仅形式简洁而优美,而且统一了许多的三角形不等式,最近,作者还发现由它的一些推论(如(2)、(3) 两式) 又可进一步推出其它很多新的不等式,这将在

另文中讨论. 另外，三正弦不等式(4)有以下等价形式：

$$\frac{h_a}{r_1}x^2+\frac{h_b}{r_1}y^2+\frac{h_c}{r_1}z^2\geqslant 4(yz\sin A_1\sin A_2+zx\sin B_1\sin B_2+xy\sin C_1\sin C_2) \tag{29}$$

(其中 h_a,h_b,h_c 分别为 $\triangle ABC$ 相应边上的高)，由专著[7](P184)中定理 6.3.3 的不等式可将上式推广到 n 维单形中去，详略.

定理2的不等式(5)形式较为复杂，但更具一般性. 其 k＝1时的情形实际上是大加权不等式(6)的直接推论，即利用恒等式 $ar_1+br_2+cr_3=2\triangle$ 而得出，可见三正弦不等式(4)是大加权不等式一个很简单的推论. 如果将其它的恒等式应用到大加权不等式中，也可得到一些有意义的结果，例如，利用 $\frac{r_2+r_3}{r_a}+\frac{r_3+r_1}{r_b}+\frac{r_1+r_2}{r_c}=2$($r_a,r_b,r_c$ 为相应边上的旁切圆半径)，易得类似于(29)的不等式：

$$\frac{r_a}{r_2+r_3}x^2+\frac{r_b}{r_3+r_1}y^2+\frac{r_c}{r_1+r_2}z^2\geqslant 2(yz\sin A_1\sin A_2+zx\sin B_1\sin B_2+xy\sin C_1\sin C_2) \tag{30}$$

上式也有许多应用，并可作一般的推广，限于篇幅，这里就不作讨论了.

参考文献：

[1] 刘健. 一个三元二次型几何不等式的应用与推广[C]. 不等式研究. 西藏：西藏人民出版社，2000.
[2] 刘健. 一类几何不等式的两个定理及其应用[J]. 华东交通大学学报，1998，15(3)：75～79.
[3] 刘健. 涉及多个三角形的不等式[J]. 湖南数学年刊，1995，15(4)：29～42.
[4] 刘健. 大加权三角形不等式的一个推论及其应用[J]. 华东交通大学学报，2001，18(1)，：70～75.
[5] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Keuwer Academic Publishers, 1989.
[6] 刘健. 一个二次型三角不等式的证明及应用[J]. 数学通讯，1998，9，26～28.
[7] 沈文选. 单形论导引－三角形的高维推广研究[M]. 湖南师范大学出版社，2000.

The Popularization and Application of three sine inequality

LIU Jian

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong Univ, 330013 China)

Abstract: The applications of heavy weighted tringle inequality is given the concerned three tringles and one point of the three sine inequality and its popularization in this paper. From this, it can infer a series of new triangle inequalities.

Key words: triangle; point; inequality