

文章编号: 1005-0523(2001)04-0006-06

楔形体尖端近似场的非协调有限元特征法

平学成¹, 陈梦成²

(1. 华东交通大学 机械工程学院; 2. 华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 提出了一个新的、基于位移的、分析平面楔形体尖端奇性应力场和位移场问题的非协调元 FE 特征分析法¹⁹。该方法与过去原有求解裂纹尖端近似场的有限元特征分析方法有几点不同: 1) 导出公式的出发点不同; 2) 单元形式为非协调元; 3) 楔形体尖端邻域内的位移场假定没有采用奇异变换技术¹⁹。文中运用该方法给出了若干有关任意形状楔形体尖端附近近似奇性应力场和位移场分布的算例, 其中, 当然包括最重要的裂纹情形, 此时楔形体张开角度为 180°¹⁹。所有的计算结果表明, 本文方法较原有方法使用的单元少而且精度高¹⁹。

关键词: 线弹性断裂; 楔形体; 奇性应力指数; 复合型; 非协调元有限元法

中图分类号: O346.1

文献标识码: A

0 引言

关于平面问题的裂纹尖端应力和位移场方面的研究最早可以追溯到 50 年代初 Williams 的工作^[1], 他应用应力函数特征分析方法分析了各种角边界载荷作用下楔形体尖端应力奇性指数问题¹⁹。70 年代 Erdogan 使用奇异积分方程的解析理论^[2], 提出了研究裂纹尖端附近应力和变形状态的奇异积分方程主部分析技术^[3]¹⁹。1985 年, 汤任基和 Erdogan^[4]运用该技术对夹紧矩形板中裂纹尖端的未知性态进行了分析, 并得到了相应的裂尖近似场¹⁹。有限差分法(FDM)也是一种求解裂纹尖端附近近似场的方法, 在进行分析的时候, 先假定场变量在极坐标系下为可分离变量, 然后将问题归结为求解一个普通微分方程^[5]¹⁹。该方法使用起来相当困难, 尤其是对复杂的几何和材料组合模型来说, 极为繁杂¹⁹。

有限元方法(FEM)是另一种研究裂纹尖端附近近似奇性应力场和位移场的强有力工具¹⁹。1990 年 Symington 等人^[6]通过使用 FEM 替代 Runge-Kutta 法, 求解应力函数表示的控制方程获得裂尖局部奇性场¹⁹。Shih 和 Asaro^[7]应用另一种不同于 Symington 等人^[6]的方法分析了弹塑性材料界面裂纹场¹⁹。该方法无需应力函数, 但往往需要在裂纹尖端邻域使用较密单元网格和曲线拟合法方能得到局部奇性应力场¹⁹。有限元特征分析方法是第三种 FEM, 它明显不同于前两种 FEM, 是 1983 年由 Yamada 和 Okumura 提出的^[8]¹⁹。这种方法是直接通过求解一元二次特征矩阵方程得到局部近似奇性应力场和位移场, 所得结果远比前面两种 FEM 直接和精确, 而且适用范围也广¹⁹。它能适用于更复杂的几何和材料组合¹⁹。1995 年 Pageau 和 Joseph^[9]成功地将这种方法的应用拓展到了各向异性材料的裂纹问题的研究领域¹⁹。

主要以 Yamada 和 Okumura^[8]方法的基本思想为线索, 从应力平衡方程和楔形体边界条件构成的弱式控制方程出发, 导出一个更为简单的、基于位移的特征问题虚功原理¹⁹。根据这个原理, 采用一维有限元分析技术, 沿着楔形体尖端邻域近似场周边进行单元离散, 继而建立一个分析楔形体尖端近似场的一元二次特征矩阵方程¹⁹。为进一步提高数值结果的精度和减少单元的使用, 单元形式为一维非协调元¹⁹。文中将给出若干算例和考核例, 以检验本文方法的有效性和可行性¹⁹。

1 基本原理

收稿日期: 2001-02-20;

作者简介: 平学成(1975-), 男, 黑龙江延寿人, 助教¹⁹。

1.1 控制方程与弱式

图 1 是一个均质平面楔形体问题示意图¹⁹。该问题包括以下几个控制方程:

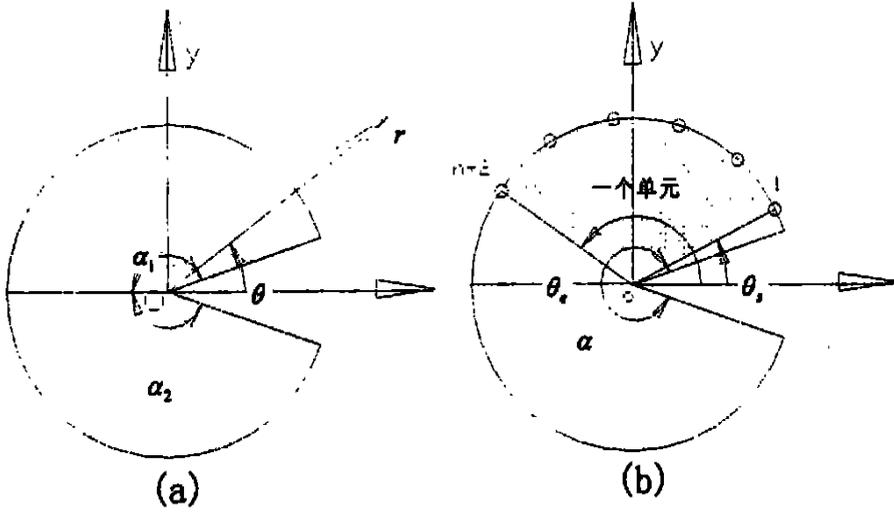


图 1 (a) 均质材料楔形体 (b) 楔形体单元划分

1) 应力平衡方程

$$\frac{\partial r \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} - \alpha_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sigma_\theta}{\partial r} + \sigma_\theta = 0 \quad (1)$$

2) 楔形体角边界条件

$$\alpha_{\theta\theta}|_{\theta=-\pi\alpha} = \sigma_\theta|_{\theta=-\pi\alpha} = \alpha_{\theta\theta}|_{\theta=\pi\alpha} = \sigma_\theta|_{\theta=\pi\alpha} = 0 \quad (2)$$

(1) 式和 (2) 式中的 r, θ 为原点设在奇异点的极坐标, α, α 为半楔形角(如图 1a), 楔形角 $\alpha = 2\alpha = 2\alpha$ (13) 为了解特征问题, 沿着 $r=R$ 的弧周界不施加任何条件, 那么由控制方程构成的弱式方程为

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} [\delta \mathbf{u}]^T \begin{Bmatrix} -\sigma_\theta \\ -\alpha_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \Big|_{r=\alpha} dR + \int_{-\alpha}^{\alpha} [\delta \mathbf{u}]^T \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \alpha_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \Big|_{r=-\alpha} dR - \int_{\Omega} \frac{1}{r} (\delta \mathbf{u})^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial r \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} - \alpha_{\theta\theta} \\ \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sigma_\theta}{\partial r} + \sigma_\theta \end{Bmatrix} d\Omega = 0 \quad (3)$$

上式中 δ 为变分算子, $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta\}^T$ ¹⁹。经过整理, (3) 式简化为

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dR d\theta - \int_{-\alpha}^{\alpha} (\delta \mathbf{u})^T \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \Big|_{r=R} d\theta = 0, \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_r, \alpha_{\theta\theta}, \sigma_\theta\}^T$ (13) (4) 式很象用传统虚功原理导出的特征问题方程, 但应该说明的是, 这里第二项中的 σ_r, σ_θ 是从变形位移得到的而不是预先给定的力边界条件(13)

1.2 有限元特征分析原理

为了求得楔形体尖端奇性应力场和位移场的角变化函数, 我们需要利用方程 (4) 来确定特征值和特征向量¹⁹。我们这里打算用有限元方法求解方程 (4), 为此将楔形体尖端邻域划分为若干个扇形区域, 每个周边 ($r=R$) 单元角度范围为 $\theta \leq \theta \leq \theta$, 共有 $n+2$ 节点(见图 1b) (13) 极坐标角度 θ 按下列形式进行插值

$$\theta = N_s \cdot \xi + N_e \cdot \theta \quad (5)$$

其中

$$N_s = \frac{1}{2}(1 - \xi), N_e = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (6)$$

式中 ξ 为自然坐标¹⁹。在外载荷作用下, 周边单元内的位移场可用如下近似形式表示

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = r^{\lambda+1} \sum_{i=1}^{n+2} [N_i] \{q_i\} = r^{\lambda+1} [N] \{q\} \quad (7)$$

其中

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & N_\lambda & 0 & N_e & 0 \\ 0 & N_s & 0 & N_\lambda & 0 & N_e \end{bmatrix}, N_\lambda = \xi^{-1}(1 - \xi), j = 1, \dots, n$$

这里位移插值采用了非协调元形式, N_λ 为非协调插值点形函数¹⁹. 单元内 i 节点位移向量为 $\{q_i\}^T = \{U_{ir}, U_{i\theta}\}$, 这里 $i = s, j (= 1, 2, \dots, n)$ e⁽¹³⁾

通过位移场和应变的关系以及 Hooke 定律, 根据方程 (5) ~ (7), 有

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\beta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{e+2} [B_i] \{q_i\} = [B] \{q\}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\beta \end{Bmatrix} = [D][B] \{q\} \quad (9)$$

其中

$$[B] = r^\lambda (\lambda [B_a] + [B_b])$$

$$[B_a] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & N_\lambda & 0 & N_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_s & 0 & N_\lambda & 0 & N_e \end{bmatrix}, j = 1, \dots, n$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & N_\lambda & 0 & N_e & 0 \\ N_s & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_s}{\partial \xi} & N_\lambda & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} & N_e & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_s}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_\lambda}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial N_e}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n$$

$[D]$ 是材料刚度矩阵, 表达式为

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

方程 (4) 用有限元格式表示为

$$\sum_{e=1}^m \int_{\theta_s}^{\theta_e} \int_0^{\hat{r}} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} r d\theta dR \sum_{e=1}^m \int_{\theta_s}^{\theta_e} [B] \{q\} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\beta \end{Bmatrix}, r=R d\theta = 0 \quad (11)$$

其中 m 是离散单元总数¹⁹. 将方程 (7) 和 (9) 代入 (11) 可得到如图 1 所示全域的特征方程

$$(\lambda [P] + \lambda [Q] + [R]) \{q\} = 0 \quad (12)$$

其中 $[P] = \int_{\theta_s}^{\theta_e} ([B_a]^T [D] [B_a] - 2[N]^T [d] [B_a]) d\theta$

$$[Q] = \int_{\theta_s}^{\theta_e} ([B_a]^T [D] [B_b] + [B_b]^T [D] [B_a]) - 2[N]^T [d] ([B_a] + [B_b]) d\theta$$

$$[R] = \int_{\theta_s}^{\theta_e} ([B_b]^T [D] [B_b] - 2[N]^T [d] [B_b]) d\theta$$

这里矩阵 $[d]$ 是矩阵 $[D]$ 的第一行和第三行, 即

$$[d] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$$

引入 $\{p\} = \lambda \{q\}$, 将特征方程 (12) 转化为标准特征方程, 即

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}Q & -P^{-1}R \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} \quad (13)$$

一般情况下, 方程 (13) 的解将给出有限个特征值 λ 和相关特征向量 $\{p\}$ 和 $\{q\}$ ¹⁹. 特征值 λ 可能是实数, 也可能是复数, 或者两者兼有¹⁹.

根据方程 (9) 可知, 应力、应变均正比于 r^λ ¹⁹. 要保证应变能有界, $\text{Re}(\lambda)$ 必须大于 -1 , 断裂力学感兴趣的范围是 $-1 < \text{Re}(\lambda) < 0$ ¹⁹. 在这种情况下, $\text{Re}(\lambda)$ 决定了奇性应力强度¹⁹. 在求得特征值 λ 和特征向量 $\{q\}$ 后, 可以通过曲线拟合和形函数插值方法计算楔形体尖端邻域内位移和应力的角分布¹⁹.

1.2 奇性应力场和位移场一般表达式

一旦获得了特征值 λ 和特征向量 $\{q\}$, 楔形体尖端附近的奇性应力场和位移场就可按以下形式给出:

$$u_i(r, \theta) = \beta^{\lambda+1} u_i(\theta) \quad (i = r, \theta), \tag{14}$$

$$\sigma_j(r, \theta) = \beta^\lambda \sigma_j(\theta) \quad (i, j = r, \theta), \tag{15}$$

式中 β 是广义应力强度因子; $u_i(\theta)$ 和 $\sigma_j(\theta)$ 分别是位移和应力的角分布函数, 它们分别有(7)式和(9)式给出

$$\{u_i(\theta)\} = [N] \{q\}, \tag{16}$$

$$\{\sigma_j(\theta)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r(\theta) \\ \sigma_\theta(\theta) \\ \sigma_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix} = [D](\lambda[B_a] + [B_b] + [B_c]) \{q\} \tag{17}$$

如果 λ 是复数, 则 $\beta, u_i(\theta)$ 和 $\sigma_j(\theta)$ 也相应为复数, 即

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i,$$

$$\beta = \beta_r - i\beta_i,$$

$$u_i(\theta) = u_{iR}(\theta) + iu_{iI}(\theta)$$

$$\sigma_j(\theta) = \sigma_{jR}(\theta) + i\sigma_{jI}(\theta)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$.

2 计算结果讨论

2.1 数值解的精确性

为了考核本文方法的有效性和精确性, 我们以均质弹性体中裂纹问题(此时 $\alpha = 360^\circ$)作为考核例, 分别用方程(13)、(16)、和(17)计算裂纹尖端的奇性应力指数、位移场分布和奇性应力场角分布, 并与现有的数值解^[9,10]和解析解^[11]进行比较。比较结果分别见表 1、图 2、和图 3, 图中裂纹尖端近似场角分布分别是用各自相应最大值进行无量纲化后的结果(下同), I 型、II 型分别表示张开型裂纹和滑开型裂纹。从表 1、图 2、和图 3 可知, 本文数值结果与解析解^[11]几乎完全一致, 比 Pageau & Joseph^[9]和 Gu & Belytschko^[10]的有限元数值解精度高, 而且使用的单元数也较他们的少。

表 1 均质弹性体裂纹尖端奇性应力指数 λ 各种方法计算值比较(平面应力)

方法	单元数	I 型	II 型
Gu & Belytschko ^[10]	80	-0.498500	-0.498500
S. S. PAGEAU ^[9]	30	-0.499991	-0.499974
本文	8	0.500000	0.500000
精确解 ^[11]		-0.5	-0.5

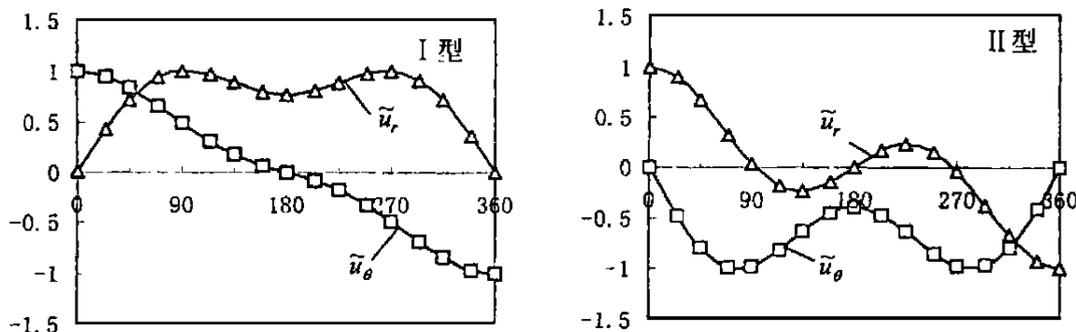


图 2 裂纹尖端位移场比较(平面应力)

(“△ □” 本文有限元数值解 “—” 精确解析解)

2.2 任意楔形体尖端奇性应力场

如图 1 所示, 不同角度 α 的楔形体, 具有不同的奇性应力指数、奇性应力场和位移场(图 4 为均质弹性楔形体的奇性应力场和位移场)。图 4 为均质弹性楔形体的奇性应力场和位移场。图 4 为均质弹性楔形体的奇性应力场和位移场。图 4 为均质弹性楔形体的奇性应力场和位移场。

形尖端奇性应力指数随其张开角 α 变化的曲线(13)从图中可以看出,当 $\alpha > \pi$ 时,楔形体尖端出现应力无界,即出现应力奇异性,这与 Williams^[1] 的结论完全吻合;当 $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ 时,奇性应力场由两部分组成,即一部分对应于 λ_1 ,另一部分对应于 λ_2 ,具体形式为 $\sigma_{ij}(r, \theta) = \beta_{r^{\lambda_1}} \sigma_{ij1}(\theta) + \beta_{r^{\lambda_2}} \sigma_{ij2}(\theta)$ ($i, j = r, \theta$) (13)图 5 分别给出了对应于楔形体张开角 $\alpha = 300^\circ$ 时 $\lambda_1 = -0.487779$ 和 $\lambda_2 = -0.269399$ 的应力角分布曲线(13)从图中可知,与裂纹情形($\alpha = 360^\circ$, 见图 3) 相比,此时各个应力分量的幅值和相位均发生了变化(13)

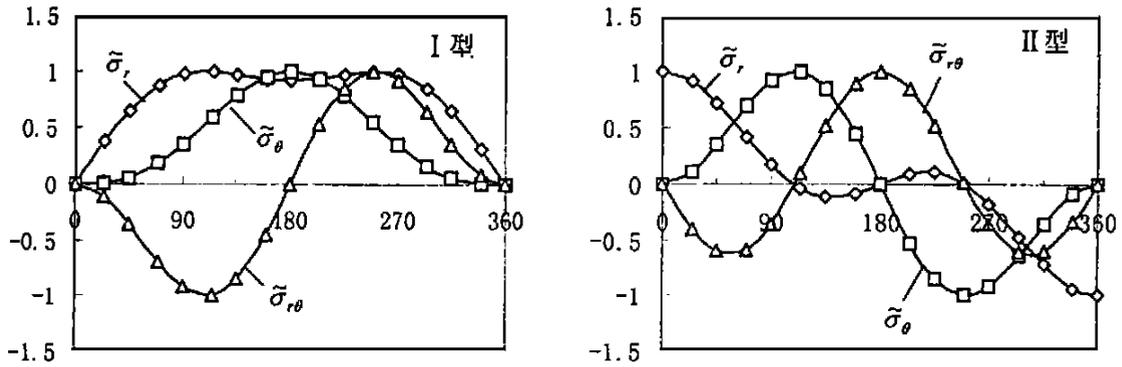


图 3 裂纹尖端应力场比较(平面应力)
 (“◇ △ □” 本文有限元数值解 “- -” 精确解析解)

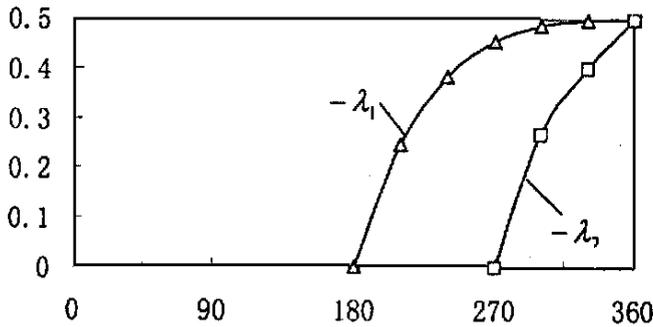


图 4 奇性应力指数($-\lambda_1, -\lambda_2$) 随楔形角 α (DEG) 变化曲线(平面应力)

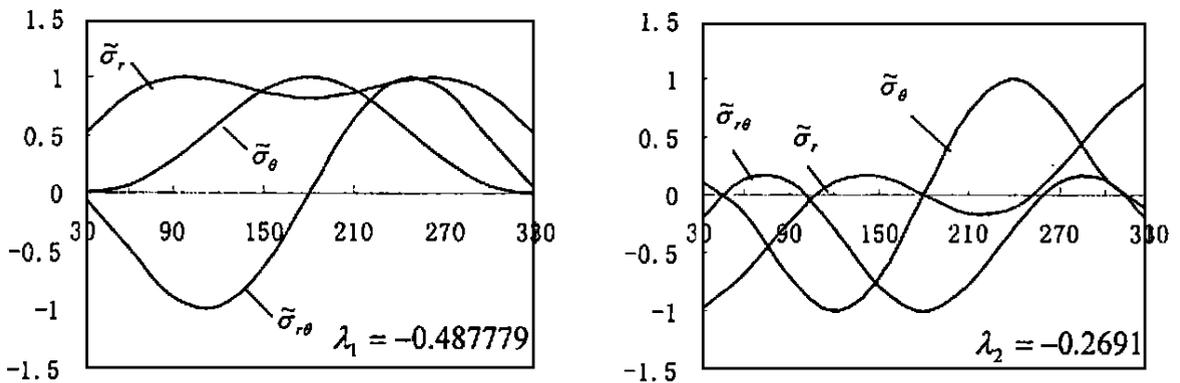


图 5 楔形体张开角 $\alpha = 300^\circ$ 时应力角分布曲线

3 结束语

通过上述讨论,可以看出,用本文提出的非协调元有限元特征方法求得的奇性应力场和位移场几乎与精确解完全重合,足见本文数值解的精确性(19).由此也说明了本文方法是一种非常有效和可行的方法,它将为研究其它更为复杂的几何和新型材料组合奇性近似场问题打下基础(19).

参考文献:

- [1] Williams ML. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension[J]. *J. Appl. Mech.*, 1952, (4): 526~535.
- [2] Muskhelishvili NI. 奇异积分方程[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1966.
- [3] Erdogan F. Mixed boundary-value problems in mechanics[J]. *Mechanics Today*, ed. Nemat-Nasser S, edition 4, 1978.
- [4] Tang R J, Erdogan F. A clamped rectangular plate containing a crack[J]. *Theo. Appl. Fract. Mech.*, 1985, (4): 328~339.
- [5] Shih C F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems[C]. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1973.
- [6] Symington M, Ortiz M, Shih CF. A finite element method for determining the angular variation of asymptotic crack tip fields[J]. *Int. J. Fract.*, 1990, (45): 51~64.
- [7] Shih C F, Asaro R J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces[J]. Part I—Small scale yielding, *J. Appl. Mech.*, 1988, (55): 299~316.
- [8] Yamada Y, Okumura H. Finite element analysis of stress and strain singularity eigenstate in inhomogeneous media or composite materials[J]. *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, ed. Atluri SN, Gallagher ER and Zienkiewicz C, Wiley, New York, 1983.
- [9] Pageau SS, Joseph JF. Finite element analysis of anisotropic materials with singular inplane stress[J]. *Int. J. Solids Struct.*, 1995, (5): 571~591.
- [10] Gu L, Belytschko. A numerical study of stress singularities in a two-material-wedge[J]. *Int. J. Solids Struct.*, 1994, (31): 865~889.
- [11] 褚武扬. 断裂力学基础[M]. 北京:科学出版社, 1979.

A Non-conforming FE Method for Asymptotic Fields of Wedge Tips

PING Xue-Cheng, CHEN Meng-Cheng

(1. School of Mechanical Eng.; 2. School of Civil Eng. & arc., East China Jiaotong Univ., Nanchang, 330013 China)

Abstract: In this paper a new non-confirming finite element FE eigenanalysis method based on displacement is developed to study the singular stress and displacement fields surrounding a wedge tip. There are the following several points different from existing finite element eigenanalysis methods for asymptotic fields near the crack tip: 1) The jump-off that deduces the formula is different. 2) The form of the element is non-confirming element. 3) The singular transformation technique is not used in the assumption of displacement fields surrounding the wedge tip. This paper presents some illustrative evaluating examples of asymptotic singular stress fields and displacements fields surrounding the arbitrary wedge tip including the most important crack case when the wedge angle is 360° degrees. All calculations show that the present method needs fewer elements, and yields more accurate results than all the previous available methods.

Key words: linear elastic fracture; wedge body; stress singularities; mixed mode; non-confirming finite element method