

文章编号: 1005-0523(2001) 04-0059-03

转移自映射混沌集的 Hausdorff 维数与测度

汪火云¹, 卢建平²

(1. 广州大学起义路校区 数学系, 广州 510030; 2. 华南师范大学 数学系, 广州 510631)

摘要: 设 d_P 是由概率向量 P 所诱导的度量, 则在符号空间 (Σ_N, d_P) 中我们有如下结论: 存在一个相对于转移自映射 σ 而言的混沌集 C , 使得它的 Hausdorff 维数处处大于零; 设 (S, α) 是 (Σ_N, d_P) 的一个子位移, $d = \dim_H(S) > 0$ 且 $H^d(S) < \infty$, 如果 $C \subset S$ 是 H^d -可测的子位移 α 的 Li-Yorke 混沌集, 则 $H^d(C) = 0$ 。

关键词: 转移自映射; Hausdorff 维数; Hausdorff 测度; 混沌集合; 符号空间

中图分类号: O189.1

文献标识码: A

0 引言与结果陈述

设 $N \geq 2$, $E = \{1, 2, \dots, N\}$ 赋予离散拓扑, 令 $E_i = E, \forall i \geq 1$ 设 $\Sigma_N = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, 则 Σ_N 是一个紧致的可度量化空间, 称之为由 N 个符号生成的符号空间^[1]。设 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是概率向量, $0 < P_i < 1, \forall i = 1, 2, \dots, N$, 在 Σ_N 上定义一个与其拓扑相容的度量 d_P 如下: $\forall x = x_1x_2\dots, y = y_1y_2\dots \in \Sigma_N$,

$$d_P(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x_1 \neq y_1 \\ P_{x_1} P_{x_2} \dots P_{x_k} & 0 < k = \min \{i | x_i \neq y_i\} - 1 < \infty \end{cases}$$

称 d_P 为概率向量 P 所诱导的度量, 如果 $P = (1/N, 1/N, \dots, 1/N)$ 为平均概率向量, 则其诱导的度量在本文中简记为 d ^[1]。设 σ 表示 Σ_N 的转移自映射, 如果 $S \subset \Sigma_N$ 是一个闭集且 $\sigma(S) \subset S$, 则称 (S, α) 为子转移, 其中 $\alpha = \sigma|_S$ ^[1]。令 $[i_1 i_2 \dots i_n] = \{x \in \Sigma_N | x_1 = i_1, x_2 = i_2, \dots, x_n = i_n\}$, 则称之为 Σ_N 的长度为 n 的柱形, 令 $[i_1 i_2 \dots i_n]_S = \{x \in S | x_1 = i_1, x_2 = i_2, \dots, x_n = i_n\}$, 若 $[i_1 i_2 \dots i_n]_S \neq \emptyset$, 则称之为 S 的长度为 n 的相对柱形, 它是子空间 S 的一个既开又闭的子集^[1]。本文约定用 $\dim_H(\cdot)$ 和 $H^s(\cdot)$ 分别表示 Hausdorff 维数和 s -维 Hausdorff 测度^[1]。混沌是动力系统研究的一个重要的课题, 下面我们摘引几个与本文相关的混沌定义^[1]。

定义 1^[1] 设 (X, d) 是一个度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是一个连续映射^[1]。 C 是 X 的非空子集^[1]。如果对于任意 $x, y \in C, x \neq y$ 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ 和 } \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0 \quad (1)$$

则称 C 对于 f 而言是 Li-Yorke 混沌的^[1]。

定义 2^[2,3] 设 (X, d) 是一个度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是一个连续映射, $C \subset X$ 。如果对于 C 的任意非空子集 A 和任意连续映射 $F: A \rightarrow X$, 存在一个严格递增的正数数序列 $\{r_i\}$, 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{r_i}(x) = F(x)$ 对于任何 $x \in A$ 成立, 则称 C 对于 f 是混沌的^[1]。

近年来, 许多作者对混沌集“大小”进行研究^[3,4,5]。熊金城将分形理论引入动力系统研究, 用 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度度量了混沌集合的“大小”, 得到了如下结论:

定理 A^[3] 设 d 是由平均概率向量所诱导的度量, 则在 (Σ_N, d) 中有如下结论:

(1) 存在一个相对于转移自映射 σ 而言的 Hausdorff 维数处处为 1 的混沌集 C , 即对 Σ_N 中任一开集 U

收稿日期: 2001-03-21

基金项目: 国家自然科学基金(19871031)和广东省自然科学基金(970395)资助课题^[1]

作者简介: 汪火云(1953-), 男, 江西南昌人, 广州大学副教授^[1]。

有 $\dim_H(U \cap C) = 1$ (13)

(2) 如果 $C \subset (\Sigma_N, d)$ 是转移自映射 σ 的 H^1 -可测的 Li-Yorke 混沌集, 则 $H^1(C) = 0$ (13)

(3) 如果 $F \subset (\Sigma_N, d)$ 是转移自映射 σ 的混沌集, 则 $H^1(F) = 0$ (13)

在文[3]的基础上, 本文得到了如下结论:

定理 1 设 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是任一概率向量, $\alpha = \min \{p_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$, d_P 是由 P 所诱导的度量, 则在符号空间 (Σ_N, d_P) 中存在一个转移自映射 σ 的混沌集 C , 使得对 Σ_N 中任一开集 U , 有: $-\log_a N \leq \dim_H(U \cap C) \leq 1$ (13)

定理 2 设 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是任一概率向量, d_P 由 P 所诱导的度量, (S, σ) 是 (Σ_N, d_P) 的一个子位移, 其中 $\dim_H(S) = d > 0$ 且 $H^d(S) < \infty$ (13) 如果 $C \subset S$ 是 H^d -可测的子转移 σ 的 Li-Yorke 混沌集, 则 $H^d(C) = 0$ (13)

2 引理

引理 1^[6] 设 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 是两个度量空间, $F \subset X_1$, 如果 $\forall x, y \in F$, 有 $d_2(f(x), f(y)) \leq C(d_1(x, y))^t$, 其中 $C, t > 0$, 则有:

(1) $\forall s > 0, H^{s/t}(f(F)) \leq C^{s/t} H^s(F)$

(2) $\dim_H f(F) \leq (1/t) \cdot \dim_H F$

引理 2 设 d_P 是由概率向量 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 所诱导的度量, d 为平均概率向量所诱导的度量 (13) 设 $f: (\Sigma_N, d) \rightarrow (\Sigma_N, d_P)$ 为恒等映射 (即 $f(x) = x$), 则 $\forall x, y \in (\Sigma_N, d)$ 有 $d_P(f(x), f(y)) \geq d(x, y)^{-\log_a \alpha}$, 其中 $\alpha = \min \{p_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ (13)

引理 3 设 d_P 是由概率向量 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 所诱导的度量, $\alpha = \min \{p_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$, d 为平均概率向量所诱导的度量 (13) 设 $f: (\Sigma_N, d) \rightarrow (\Sigma_N, d_P)$ 为恒等映射, 如果 $F \subset (\Sigma_N, d)$, 则 $\dim_H f(F) \geq -\log_a N \cdot \dim_H F$ (13)

证明 考虑 $f^{-1}: f(F) \rightarrow F$ 的映射, 由于 $\forall f(x), f(y) \in f(F)$ (其中 $x, y \in F$), 由引理 2 有:

$$d(f^{-1} \circ f(x), f^{-1} \circ f(y)) = d(x, y) \leq d_P(f(x), f(y))^{-\log_a N}$$

由引理 1 知, $\dim_H(f^{-1} \circ f(F)) = \dim_H F \leq \frac{1}{-\log_a N} \dim_H f(F)$, 故 $\dim_H f(F) \geq -\log_a N \cdot \dim_H F$ (13)

引理 4 设 d_P 是由概率向量 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 所诱导的度量, 则在符号空间 (Σ_N, d_P) 中我们有如下结论: (1) 设 $F = [i_1 i_2 \dots i_n]$, 则 $H^1(F) = P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_n}$; (2) $H^1(\Sigma_N, d_P) = 1$ (13)

引理 5 设 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 是两个紧致的度量空间, 设 $F \subset X_1$, $f: F \rightarrow X_2$ 是映射, 如果存在实数 $\lambda > 0$, 使得 $d_2(f(x), f(y)) = \lambda d_1(x, y)$, $\forall x, y \in F$, 则 $\forall d > 0$, 有 $H^d(f(F)) = \lambda H^d(F)$ (13)

由 Hausdorff 测度的定义直接可得 (13)

引理 6 设 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是概率向量, 令 $b = \max \{p_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$, 设 (S, σ) 是 (Σ_N, d_P) 的子位移, 则 $\forall d > 0$,

(1) 若 $F \subset [i]_s$, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 则 $H^d(\sigma(F)) \geq (1/b)^d \cdot H^d(F)$ (13)

(2) 设 $F \subset S$, 有 $H^d(\sigma(F)) \geq (1/Nb)^d \cdot H^d(F)$ (13)

3 结论的证明

定理 1 的证明 (13) 由定理 A 知在 (Σ_N, d) 中存在一个混沌集 C , 使得对 Σ_N 中任一开集 U , 有 $\dim_H(U \cup C) = 1$ (13)

设 $f: (\Sigma_N, d) \rightarrow (\Sigma_N, d_P)$ 为恒等映射, 由引理 3 及引理 4 得:

$$-\log_a N \cdot \dim_H(C \cap U) \leq \dim_H f(C \cap U) \leq \dim_H(\Sigma_N, d_P) = 1 \quad (13) \text{ 因此在 } (\Sigma_N, d_P) \text{ 中, } -\log_a N \leq \dim_H(C \cap U) \leq 1 \quad (13)$$

定理 2 的证明 (13)

中国知网 <https://www.cnki.net>

$C \subset S$ 是 σ 的一个 H^d -可测的 Li-Yorke 混沌集, 对任一 $i \in E$, 令 $C_i = C \cap [i]$, 显然每一个 C_i 都是 H^d -

可测的⁽¹³⁾由于 $\alpha|_{[i]_s}:[i]_s \rightarrow s$ 是一个同胚,故 $D_i = \alpha(C_i)$ 也是 H^d -可测的⁽¹³⁾从而 $D = \alpha(C) = \alpha(\bigcup_{i=1}^N C_i) = \bigcup_{i=1}^N \alpha(C_i) = \bigcup_{i=1}^N D_i$ 也是 H^d -可测的⁽¹³⁾由于 C 是一个 Li-Yorke 混沌集,故映射 $\alpha|_C$ 是一个单射,由诸 C_i 两两无交得诸 D_i 两两无交⁽¹³⁾据引理 6 有 $H^d(D) = H^d(\bigcup_{i=1}^N D_i) = \sum_{i=1}^N H^d(D_i) = \sum_{i=1}^N H^d(\alpha(C_i)) \geq \sum_{i=1}^N (\frac{1}{b}) H^d(C_i) = (\frac{1}{b})^d H^d(C)$, 而 $b = \max\{p_i| i=1, 2, \dots, N\}$ ⁽¹³⁾

另一方面易验证 $D = \alpha(C)$ 也是一个 Li-Yorke 混沌集⁽¹³⁾据以上论证,如果存在一个 H^d -可测的混沌集 $C \subset S$, 则 $\forall n \geq 1, \alpha^n(C)$ 也是一个可测的 α 的 Li-Yorke 混沌集, 且有 $H^d(\alpha^n(C)) \geq (\frac{1}{b})^{nd} H^d(C)$ ⁽¹³⁾若 $H^d(C) \neq 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $H^d(\alpha^n(C)) \rightarrow \infty$, 这与 $H^d(S) < \infty$ 矛盾⁽¹³⁾故 $H^d(C) = 0$ ⁽¹³⁾

参考文献:

[1] T·Y·Li and J·A·Yorke, Period three implies chaos, Amer·Math·Monthly[J]. 82(1975), 985~992.
[2] Xiong Jincheng, Yang Zhongguo, Chaos caused by a topologically mixing map, In: Shiraiwa k·ed· Dynamical Systems and Related Topics[M]·Singapore, New York, world Scientific, 1992, 550~572.
[3] 熊金城¹⁹.符号空间转移自映射混沌集合的 Hausdorff 维数[J]·中国科学(A 辑), 25(1995), 1, 1~11¹⁹.
[4] Smital J·, A chaotic function with some external propertices[J]· Proc·amer·Math·Soc·, 1983, 87, 54~56¹⁹.
[5] 熊金城, 陈二才¹⁹.强混合的保测变换引起的混沌[J]¹⁹中国科学(A 辑), 26(1996), 11, 961~967¹⁹.
[6] Falconer K· Fractal Geometry[M]· England:Wiley, 1990

The Hausdorff dimension and Hausdorff Measure of Chaotic Subsets for Shift

WANG Huo-yun¹, LU Jian-ping²

(¹·Department of Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou 510030, China;
²·Department of Mathmetics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: In this paper we obtained some results as follow :Suppose d_P is a metric on Σ_N by probability vector P to be defined, then is a chaotic set $C \subset \Sigma_N$ for shift σ such that for every open set $U \subset \Sigma_N$, $\dim_H(U \cap C) > 0$; if C is a H^d -measurable Li-yorke chaotic set for subshift α , where $\dim_H(S) = d$ and $H^d(C) < \infty$, then $H^d(C) = 0$.

Key words: shift; Hausdorff dimension; Hausdorff measure; chaotic sets; symbolic spaces