第 18 卷 第 4 期 华 东 交 通 大 学 学 报 Vol.18 No.4
2001 年 9 月 Journal of East China Jiaotong University Sep. 2001

文章编号:1005-0523(2001)04-0062-02

关于图的同构映射群的构造

王 森, 周尚超, 邓毅雄

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:通过定义同构映射的广义乘法构造了图的同构映射群⒆

关 键 词:同构群;自同构;图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

0 引 言

本文讨论的同构映射群是定义在"广义乘法"上的,与简单的映射乘法有一些区别,它不同于一般集合的变换群⒀

定义 1 设给出图 G,集合 $V = \{H \mathbf{m} H \cong G\}$是与图 G 同构的所有图的集合,称它为关于图 G 的同构图集合,记为 V⒀

这里须说明,同构图集合 V 当然包含图 G⒀

定义 2 设同构映射集合 $f(V) = \{f_i \mid$ 对 f_i,存在 $H_1, H_2 \in V$,使 $f_i: H_1 \to H_2\}$,称 $f(V)$ 为关于 V 的同构映射集合,记 $f(V)$⒀

f_i 是图 H_1, H_2 的同构映射,如 $H_1 = H_2$,则 f_i 就是自同构映射⒀

定义 3 称 $f_e(G) = \{f_i \mathbf{m} f_i: G \cong G\}$为图 G 的自同构集合⒀显然,有 $f_e(G)$ 是 $f(V)$ 的子集⒀

定义 4 图 G 在自同构映射集合中,存在同构映射,使在图 G 中任取一点 v_i,有 $v_i \to v_i$,这个映射称为图 G 的平凡自同构映射,记为 e_G⒀

定义 5 设 $f_p(V) = \{f_i \mathbf{m}$ 任取 $H_1, H_2 \in V$,如 $H_1 \neq H_2$,则存在且确定一个 $f_i: H_1 \cong H_2$;如 $H_1 = H_2$,则 $f_i = e_{H1}: H_1 \cong H_2\}$,称 $f_p(V)$ 为唯一确定性同构映射集合⒀

显然 $f_p(V)$ 是 $f(V)$ 的子集,且 H_1, H_2 在 $f_p(V)$ 之中的同构映射是唯一的,但如果 H_1, H_2 之间的同构映射不唯一,则对于 V 集的 $f_p(V)$ 也不唯一⒀

1 主要结论

首先要定义群的乘法:

定义 6 任取 $f_i, f_j \in f(V)$,存在 $H_1, H_2, H_3, H_4 \in V$,使

$f_i: H_1 \to H_2$; $f_j: H_3 \to H_4$

则唯一存在 $f_n, f_m \in f_p(V)$,有 $f_n: H_2 \to H_3$;$f_m: H_1 \to H_4$

规定运算"o":$f_i \, o \, f_j = f_1$; $f_j \, o \, f_i = f_2$:

$$f_1: \quad H_1 \xrightarrow{f_i} H_2 \xrightarrow{f_n} H_3 \xrightarrow{f_j} H_4$$

$$f_2: \quad H_3 \xrightarrow{f_j} H_4 \xrightarrow{f_m} H_1 \xrightarrow{f_i} H_2$$

简记为:$f_1: H_1 \to H_4$;$f_2: H_3 \to H_2$

f_1 是由 f_i, f_n, f_j 来唯一确定的,f_2 是由 f_j, f_m, f_i 来唯一确定的⒀

定义 7 任一个 $f_i \in f(V)$,存在 $H_1, H_2 \in V$,$f_i: H_1 \to H_2$,规定 f_i 的反映射为它的逆映射,记为 f_i^{-1},有$\in f_i^{-1}: H_2 \to H_1$⒀显然有 $f_i^{-1} \in f(V)$⒀

显然有性质,$f_i \, o \, f_i^{-1} = e_{H1}$;$f_i^{-1} \, o \, f_j = e_{H2}$;及 $f_i^{-1} \in f(V)$⒀

定理 1 同构映射群 $f(V)$ 关于运算"o"构成半群⒀

证明: 任取 $f_i, f_j, f_k \in f(V)$,

存在 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 \in V$

$f_i: H_1 \to H_2$, $f_j: H_3 \to H_4$, $f_k: H_5 \to H_6$

由乘法定义:$f_i \, o \, f_j = f_1$,唯一存在 $f_n \in f_p$

收稿日期:2001-05-10;

作者简介:王森(1969-),男,黑龙江齐齐哈尔市人,华东交通大学讲师⒀

(V)，$f_i:H_1\to H_2$，即

$$f_1:\quad H_1 \xrightarrow{f_i} H_2 \xrightarrow{f_n} H_3 \xrightarrow{f_j} H_4$$

$f_j\, o\, f_k = f_2$ 唯一存在 $f_m \in f_p(V)$，$f_2:H_3\to H_6$，即

$$f\quad H_3 \xrightarrow{f_j} H_4 \xrightarrow{f_m} H_5 \xrightarrow{f_k} H_6$$

易知，$f_1, f_2 \in f(V)$，$f(V)$ 对"o"封闭⒀

$(f_i\, o\, f_j)\, o\, f_k = f_1\, o\, f_k : H_1\to H_6$，即

$$f_1:\quad H_1 \xrightarrow{f_i} H_2 \xrightarrow{f_n} H_3 \xrightarrow{f_j} H_4 \xrightarrow{f_m} H_5 \xrightarrow{f_k} H_6$$

$f_i\, o\, (f_j o f_k) = f_i\, o\, f_2 : H_1\to H_6$，即

$$f_1:\quad H_1 \xrightarrow{f_i} H_2 \xrightarrow{f_n} H_3 \xrightarrow{f_j} H_4 \xrightarrow{f_m} H_5 \xrightarrow{f_k} H_6$$

由于 f_i, f_j, f_m, f_n 均已知唯一

∴$(f_i\, o\, f_j)\, o\, f_k = f_i\, o\, (f_j o f_k)$ 满足结合律

证毕

定义 8　规定 e：任取 $H\in V$，则 $e = e_H : H \cong H$，称 e 是超平凡自通同构映射，简称超平凡映射⒀

e 是一个抽象自同构映射，它具体以平凡自同构映射存在于同构映射 $f(V)$ 和唯一确定性同构映射集 $f_p(V)$ 之中，不妨规定 $e\in f(V)$，且 $e\in f_p(V)$，则

定理 2　同构映射群 $f(V)$ 关于运算"o"构成群⒀

证明：　由定理 2 知 $f(V)$ 已经半群

任取 $f_i\in f(V)$　存在 $H_1, H_2 \in V$ $f_i:H_1\to H_2$，

显然 $f_i\, o\, e = f_i\, o\, e_{H1} = f_i$

$e_o f_i = \quad e_{H1}\, o\, f_i = f_i$

超平凡映射 e 为 $f(V)$ 的单元

已知　$f_i:H_1\to H_2$，$f_i^{-1}:H_2\to H_1$，

由 f_i^{-1} 定义有　$f_i\, o\, f_i^{-1} = e_{H1} = e$

$f_i^{-1}\, o\, f_i = e_{H2} = e$

∴$f_i\, o\, f_i^{-1} = f_i^{-1} o\, f_i = e$

证毕⒀须说明 $f(V)$ 随 $fp(V)$ 的不同而不唯一⒀

定理 3　图 G 的自同构集合 $f_e(G)$ 是关于上述乘法"o"的群，称为自同群，且 e_G 是它的单位元⒀

证明：　任取 f_j，$f_k \in f_e(G)$ 根据乘法定义知 $f_j o\, f_k = f_k$，$f_e(G)$ 对乘法具有封闭性 f_j^{-1} 由定义 $f_j^{-1}\in f_e(G)$，且 $f_j\, o\, f_j^{-1} = f_j^{-1}\, o\, f_j = e_G$. 证毕

类似可证：

定理 4　唯一确定性同构映射集合 $f_p(V)$ 关于运算"o"构成群⒀

例如：$G = \{v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6\}$，$H = \{u_1u_3, u_1u_4, u_1u_6, u_2u_3, u_2u_4, u_2u_6, u_5u_3, u_5u_4, u_5u_6\}$⒀

显然有 $G\cong H$，$H\in V(G)$⒀平凡自同构映射 e_G；$V_i\to V_i$，$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$⒀

2　结束语

本文主要定义了唯一确定性同构映射 $f_p(V)$ 和抽象单位元 e，即超平凡同构映射单位元，这样才构造了同构群⒀我认为对研究同构性质很有意义，它开拓了研究图同构的新视角⒀

参考文献：

[1]　王森等. 关于简单图中对称点的性质[J]. 华东交通大学学报 19.2000,(2):101～103.

[2]　周尚超. 图的自同构群[J]. 华东交通大学学报 19.1995,(1):76～81..

[3]　F 哈拉里. 图论[M]. 上海：上海科技出版社，1968.

[4]　李慰萱. 图论[M]. 长沙：湖南科技出版社，1980.

Structure of Graph Isormorfic Groups

WANG Sen，ZHOU Shang-chao，DENG Yi-xiong

(Shool of Natrural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper structures the group for homologues of same structure among same structural graphs.

Key words: isormorphic groups; automorphism; graph