

文章编号 :1005 - 0523 (2002)01 - 0053 - 02

方程 $a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 = b$ 的解的个数与程序

周尚超, 刘二根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西南昌 330013)

摘要: 给出线性方程 $a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 = b$ 的解的个数的一个算法和程序.

关 键 词: 线性方程; 算法; 计算机程序

中图分类号: O157.1

文献标识码: A

现实生活中有许多问题可归结为求方程

$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 = b$ ($a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$) (*) 的非负整数解的个数.

问题 1. 1992 年大学生数学模型竞赛 B 题: 生命蛋白质是由若干种氨基酸的不同组合构成, 各种氨基酸的分子量为 $a_1 \sim a_{18} = 57, 71, 81, 97, 99, 101, 103, 113, 114, 115, 126, 129, 131, 137, 147, 156, 163, 186$, 给定某一蛋白质的分子量 b (≤ 1000). 设定数学模型给出蛋白质所有可能的组成. 此问题就是要求当 $b = 1000, n = 18$, 时方程 (*) 解的个数. 文 [1] 中给出当 $b = 1000$ 时所有解的个数是 28268, 计算时间是 810 秒. 当 b 的值每增加 100 时, 解的个数, 计算时间增加为原来的 3 倍.

问题 2. 1 元钱换为零钱有多少种方法就是要求方程 $50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 100$ 的解的个数.

令 $t_i = \text{int}(b/a_i), i = 1, 2, \dots, n$. 一般的解法是 x_i 可取的值是 $0, 1, 2 \dots t_i$. 令 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 取尽所有可能的值, 将其代入方程 (*) 验证, 其计算量随着 $(1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$ 的增加而增加, 文 [2] 给出 1 种算法和程序, 当 $n < 27$ 时, 只要输入 $n, b, a_1, a_2, \dots, a_n$ 就可求解. 对于问题 1, 当 $b = 1000$ 计算时间为 6 秒(用 486DLC 计算机). 但文 [2] 中的算法是基于穷举法, 用 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的所有可能的取值进行验证, 求解的范围有限. 当 $b = 1700$ 时, 长

时间计算不出. 现在用 CPU 为 Celeron 500 的计算机, 若 $b = 1700$ 时间为 52 秒, $b = 2000$ 为 780 秒.

本文提出 1 种更有效的算法. 这种算法当 $b = 10\ 000$ 时计算时间不到 1 秒, $b = 100\ 000$ 为 57 秒(问题 1). 如果说前面提到的算法的计算量为 $(1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$ 那么以下算法的计算量为 $n \times b \times b / \min(a_i)$. 为叙述方便以 $n = 3$ 为例说明. 令 $f[3, b]$ 是 $a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 = b$ 的解的个数, $f[2, b]$ 是 $a_2 x_2 + a_1 x_1 = b$ 的解的个数.

若 (x_2, x_1) 是 $a_2 x_2 + a_1 x_1 = b$ 的解, 则 $(0, x_2, x_1)$ 是 $a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 = b$ 的解.

若 (x_2, x_1) 是 $a_2 x_2 + a_1 x_1 = b - i \times a_3$ 的解, 则 (i, x_2, x_1) 是 $a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 = b$ 的解.

一般容易得如下定理.

定理 令 $0 \leq b_0 \leq b, f[i, b_0]$ 是方程 $a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_1 x_1 = b_0$ 的解的个数, $k = i + 1, t = \text{int}(b_0/a_k)$. 则 $f[k, b_0] = f[i, b_0] + f[i, b_0 - a_k] + f[i, b_0 - 2a_k] + \dots + f[i, b_0 - ta_k]$ 是方程 $a_k x_k + a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_1 x_1 = b_0$ 的解的个数.

由此定理, 可用递推方法求 (*) 的解, 其计算速度快, 且求出的是 $(b + 1) \times n$ 个方程 $a_i x_i + a_{i-1} x_{i-1} + \dots + a_1 x_1 = b_0$ 的解的个数 $f[i, b_0] (0 \leq b_0 \leq b, i = 1, \dots, n)$ 在较早的计算机语言如 Turbo C, BC + + 3.1 和 Turbo Pascal, 定义的数组的大小不能超过 64k. 数组下标不能超过 32000. 这就限制了 $(b + 1) \times n$

收稿日期 2001 - 04 - 09

作者简介: 周尚超 (1948 -), 男, 云南蒙自人, 教授.

<32000. 如 $n = 18$, $b > 1700$ 就无能为力. 如用现在的 VC++ 和 Delphi 情况大为改观. 在 Delphi 中, $b = 100000$, 用 32 位整数运行正常. 以下是计算程序. 只要输入 $n, b, a_1, \dots, a_n$ 就可求解.

//程序第 1 步, 计算 $a_1x_1 = b_0$ 的解的个数 $f[1, b_0]$, $0 \leq b_0 \leq b$.

```
for b0: = 0 to b do begin
```

```
    if (b0 mod a1) = 0 then f[i, b0]: = 1
```

```
    else f[i, b0] = 0;
```

```
end;
```

//程序第 2 步, 计算 $a_kx_k + \dots + a_1x_1 = b_0$ 的解的个数

$f[k, b_0]$, $k = 2, \dots, n$, $0 \leq b_0 \leq b$.

```
for k: = 2 to n do begin
```

```
    for m: = 0 to b do f[k, m]: = 0;
```

```
    for b0: = 0 to b do begin
```

```
        for i: = 0 to b0 div a[k] do f[k, b0]: = f[k - 1, b0] + f[k - 1, b0 - i * a[k]];
```

```
    end;
```

```
end;
```

如果只须求方程 (*) 的解 $f[n, b]$, 而不需要 $f[k, b_0]$ 的解 ($k < n$). 为节省内存空间, 扩大求解范围. 可将 2 维数组 f 改为 1 维数组, 此时的计算程序如下

//程序第 1 步, 计算 $a_1x_1 = b_0$ 的解的个数并将其存于数组 g

```
for b0: = 0 to b do begin
```

```
    if (b0 mod a1) = 0 then g[b0]: = 1;
```

```
    else g[b0] = 0;
```

```
end;
```

//程序第 2 步, 计算 $a_nx_n + \dots + a_1x_1 = b_0$ 的解的个数并将其存于数组 g .

```
for k: = 2 to n do begin
```

```
    for m: = 0 to b do f[m]: = 0;
```

```
    for b0: = 0 to b do begin
```

```
        for i: = 0 to b0 div a[k] do f[b0]: = f[b0] + g[b0 - i * a[k]];
```

```
    end;
```

```
    for m: = 0 to b do g[m]: = f[m];
```

```
end;
```

这样计算出的是 $b+1$ 个方程的解的个数 $f[b_0]$, $b_0 = 0, \dots, b$.

参考文献:

- [1] 程龙, 张云军, 赵蕊. 蛋白质氨基酸的组成问题 [J]. 数学的实践与认识. 1993, (3): 86 ~ 94.
- [2] 周尚超, 方程 $a_nx_n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x_1 = b$ 的算法与程序 [J], 华东交通大学学报. 1999, (1): 72 ~ 77.

The Algorithm and Programming of Linear Equation

ZHOU Shang-chao, LIU Er-gen

(School of Natural Science East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, the algorithm and programming of linear equation $Ax = b$ are given.

Key word: linear equation; algorithm; programming.