

文章编号: 1005 - 0523(2002)01 - 0058 - 04

关于 2 阶矩阵指数方程的一点探讨

姜正涛¹, 袁平之²

(中南大学 1. 铁道校区科研所; 2. 铁道校区数理系 湖南 长沙 410075)

摘要: 给出了 $GL_2(C)$ 上的指数方程 $A^m - \zeta B^n$ 奇异时矩阵对 (A, B) 的几种类型。
关 键 词: 矩阵对; 指数方程
中图分类号: O151. 21 文献标识码: A

0 引 言

文[1][2]在探讨关于矩阵的正定性的问题时假定:

对每一个 N 至少存在 $N^2/(\log N)^2$ 对正整数 m, n , 使得 $A^m - B_n$ 是奇异的, 则 A, B 的特征值中至少有一个是单位根, 本文对指数方程 $A^m - \zeta B^n$ 奇异有无穷解时, 分类讨论了矩阵对 (A, B) 的相关情况, 在 $\zeta = 1$ 时可以得到上述结果。

1 几种类型和记号

1)类: 对某整数 m, n , 存在 $l \in Z^+$, 对任意 $k \in Z, A_1^{(kl+1)m} - \zeta B_1^{(kl+1)n} = \begin{pmatrix} \alpha^{(kl+1)m} - \zeta \rho^{(kl+1)n} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 是奇异的。

2)类: 对某整数 m, n , 存在 $l \in Z^+$, 对任意 $k \in Z, A_1^{(2kl+1)m} - \zeta B_1^{(2kl+1)n} = \begin{pmatrix} \alpha^{(2kl+1)m} & -\zeta \rho^{(2kl+1)n} \\ -\zeta \rho^{(2kl+1)n} & \beta^{(2kl+1)m} \end{pmatrix}$ 是奇异的。

3)类: 对某整数 m, n , 对于非零的 $\theta, t, \lambda, \epsilon \in C$ 且 $\theta^m = -\zeta \epsilon^n, t^m \lambda^n = \zeta \epsilon^{2n}$ 存在不全为零的 r, s , 对任意的 $t \in Z, A_1^{kr+m} - \zeta B_1^{ks+n} = \begin{pmatrix} \theta^{kr+m} - 2\vartheta^{ks+n} + \zeta \epsilon^{ks+n} & -2\zeta(\lambda^{ks+n} - \epsilon^{ks+n}) \\ -\zeta \epsilon^{ks+n} + \vartheta^{ks+n} & t^{kr+m} - 2\zeta \epsilon^{ks+n} + \vartheta^{ks+n} \end{pmatrix}$ 是奇异的。

异的。

4)类: $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{\lambda u}) \rho^n & \lambda \rho \\ -u \rho & (1 + \sqrt{\lambda \rho}) \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda, \alpha, \rho, u \in C$, 满足, $(\alpha^m - \zeta \rho^n)^2 = umn \zeta \alpha^m \rho^n$ 有无限对 $(m, n) \in Z^2$ 。

5)类: 存在某整数对 r, s , 和对任意的两整数 $t, u, A_1^{r(u+1)} - \zeta B_1^{s(u+1)} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, A$ 的特征值中至少存在一个 ω , 满足 $\omega^r = \zeta, B$ 中的特征根中至少有一个是单位根。

6)类: 对某整数 $r, s, s \neq 0, \theta, k \in C, k\theta = \zeta^2$, 存在 $l \in Z^+$ 对任意 $t \in Z, A_1^{r(2t+1)} - \zeta B_1^{s(2t+1)} = \begin{pmatrix} \theta^{r(2t+1)} & -\zeta \\ -\zeta & k^{r(2t+1)} \end{pmatrix}$ 是奇异的。

此时, A_1, B_1 都能对角化, 并且, 若 A_1 的两特征值 λ, ω 为单位根, 则 $(\lambda \omega)^r = \zeta, B_1$ 的两特征值的乘积也是单位根。

7)类: 对某整数 r (固定), s , 存在 $l \in Z^+$, 对任意 $k \in Z, A_1^r - \zeta B_1^{s(k+1)} = \begin{pmatrix} \alpha^r - \zeta \rho^{s(k+1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 是奇异的。此时, B_1 的其中一个特征根是一单位根。

8)类: 对某整数 r, s , 存在 $l \in Z^+$, 对任意 $k \in Z$, 有 $A_1^{(kl+1)r} - \zeta B_1^s = \begin{pmatrix} \alpha^{(kl+1)r} - \zeta \rho^s & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 是奇异的。

收稿日期: 2001 - 10 - 23
作者简介: 姜正涛(1976 -), 男, 山东青岛人, 中南大学硕士研究生。

9)类:对某整数 r, s , 存在三个固定的整数 l, e , $f, A_1^r = \begin{pmatrix} a^r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, B_1^s = \begin{pmatrix} \rho^s & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, 并且, $a^r = \zeta \rho^s$, 对任意 $k, t, u \in Z$, 有 $A_1^{(k+1)(u+1)r} - \zeta B_1^{(k+1)(u+1)s} = \begin{pmatrix} a^{(k+1)(u+1)r} - \zeta \rho^{(k+1)(u+1)s} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 是奇异的.

几种记号的定义: A, B 是线性群 $GL_k(C)$ 中的两个矩阵, $S_{A,B} := \{(m,n) \in Z^2 \mid A^m - \zeta B^n \text{ 是奇异的}\}$.

定义 1 矩阵对相似 $GL_k(C)$ 上的矩阵对 (A, B) 和 (A_1, B_1) , 如果存在 $J \in GL_k(C)$ 使 $A_1 = JAJ^{-1}, B_1 = JBJ^{-1}$, 称 (A, B) 与 (A_1, B_1) 相似.

显然, 如果 (A, B) 相似于 $(A_1, B_1), (B_1, A_1), (A_1^T, B_1^T), (B_1^T, A_1^T)$, 则 $S_{A,B}$ 是无限集合当且仅当 S_{A_1,B_1} 是无限集合.

定义 2 矩阵对相关 $GL_k(C)$ 上的两矩阵对 $(A, B), (A_1, B_1)$, 如果满足上述关系, 称 (A, B) 与 (A_1, B_1) 是相关的.

$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C^n, a_1 a_2 \dots a_n \neq 0, H = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in Z^n, |H| = \max_{h_i \in H} |h_i|, \sum_{i \in I} f_i(H) \underline{a}_i^H = 0, P = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ 是关于某一根的指标集的一个分割, $p \leq P$ 表示 p 是 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 中的一个; $p < P$ 表示 p 是 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 中某个 P_j 的真子集. 对于分割 p , 用 $i \sim_j^p$ $i, j \in I$ 表示 i, j 属于 p 的同一个子集合. 令

$$U_p = \left\{ H \in Z^n \mid \begin{cases} \sum_{i \in P_j} f_i(H) \underline{a}_i^H = 0 & j = 1, 2, \dots, t \\ \sum_{i \in p} f_i(H) \underline{a}_i^H \neq 0 & \text{对每一个 } p < P \end{cases} \right\} \quad (1.1)$$

$H_p = \{H \in Z^n \mid \underline{a}_i^H = \underline{a}_j^H \text{ 对每一个 } i \sim_j^p\}$, 于是, 存在 Z^n 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 使得存在正整数 $d_1, d_2, \dots, d_n$, 满足: $\{k_1 d_1 \alpha_1, k_2 d_2 \alpha_2, \dots, k_n d_n \alpha_n\} = H_p, (k_i \in Z, i = 1, 2, \dots, n)$ 令 $S_p = \{\sum_{i=1}^n \eta_i \alpha_i, 0 \leq \eta_i < d_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 这样, $Z^n = S_p \oplus H_p$.

$A \triangleright B$ 或 $B \triangleright A$ 表示存在整数 C (C 仅依赖于 f_i 和 $\underline{a}_i$), 使 $A \leq C(B+1)$.

2 引理

引理 1 令 $H \in U_p, H = H' + H'',$ 其中 $H' \in S_p, H'' \in H_p$, 则: $|H'| \leq \log |H|$.

引理 2 设 $f(x) \in C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是一次数 $\leq d$ 的多项式, $f(x)$ 在 H_p 上不恒为零, 则: (1) 对每一自然数 N , 有 $\#\{H \in H_p \mid |H| \leq N, f(H) = 0\} \leq d N^{n-1}$, (2) 存在 $H \in H_p$, 满足, $|H| \leq d, f(H) \neq 0$.

对每个 $H' \in S_p$ 和集合 $p < P$, 令:

$$g_{H',p}(X) = \sum_{i \in p} f_i(H' + X) \underline{a}_i^H$$

对任意 $H' \in H_p, i \sim_j^p$, 有 $\underline{a}_i^H = \underline{a}_j^H$, 于是, 可把 U_p 分为两个不相交的子集:

$$\begin{aligned} U_p^{(1)} &= \{H \in U_p \mid g_{H',p_j}(H'') (i = 1, 2, \dots, t) \text{ 中至少有一个在 } H_p \text{ 上不恒为零}\} \\ U_p^{(2)} &= \{H \in U_p \mid g_{H',p_j}(H'') (i = 1, 2, \dots, t) \text{ 在 } H_p \text{ 上不恒为零}\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

引理 3 设 $U_p^{(1)}(N) = \{H \in U_p^{(1)} \mid |H| \leq N\}$, 则:

$\# U_p^{(1)}(N) \leq N^{n-1} (\log N)^{r-1}$, 其中 $N > 1$, 若 $0 < r := \text{rank } H_p \leq N; U_p^{(1)}(N) = \Phi$, 若 $r = 0$ 或所有的 $f_i(H) (i \in I)$ 在 H_p 上是常数.

引理 4 存在一有限集 $S \subseteq S_p$, 满足: (1) $U_p^{(2)} \subseteq S + H_p$, (2) 对每一个 $H \in S + H_p$, 都有, $\sum_{i \in P_j} f_i(H) \underline{a}_i^H i = 1, 2, \dots, t$.

引理 5 设 (2.1) 式有无穷个解, 则存在一个关于 I 的分割 P , 每个子集的基数 ≥ 2 , 每一对属于 P 中同一个子集的 $i, j, \alpha_i / \alpha_j$ 是单位根.

3 主要结果

定理 1 对于一指数方程, $a^m = \zeta \rho^n, a, \zeta, \rho \in C^*$, 令 $H_p := \{(r, s) \in Z^2 \mid a^r = \rho^s\}$, 如果, $\text{rank } H_p = 2$, 则, ζ 是一单位根.

证明: 假设, $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in Z^2$ 是不相关的两组向量, 于是有,

$$\begin{aligned} a^{m+r_1} &= \zeta \rho^{n+s_1}, a^{m+r_2} = \zeta \rho^{n+s_2} \\ \text{所以有, } (a^{m+n})^{s_2} &= \zeta^2 (\rho^{n+s_1})^{s_2}, (a^{m+r_2})^{s_1} = \zeta^2 (\rho^{n+s_2})^{s_1} \\ \alpha^{r_1 s_2 - r_2 s_1} \cdot \alpha^{m(s_2 - s_1)} &= \zeta^{2-s_1} \rho^{n(s_2 s_1)} \end{aligned}$$

于是, $\alpha^{r_1 s_2 - r_2 s_1} = 1$. 同理, $\rho^{2r_1 - r_1 s_2} = 1$. 这样, α 和 ρ 都是单位根, 可推出 ζ 也是单位根.

由线性代数的知识不难得出若 $A \in GL_2(C)$, 则要么 A 与 $N_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 相似, 要么 A 与 N_2 相似 $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (这样的 N 我们称为标准形). 于是, 任意

$GL_2(C)$ 上的矩阵对相似于下面形式的矩阵对: A 是一标准形, $B = JNJ^{-1}$.于是, $S_{A,B} = \{(m,n) \in Z^2 \mid A^m - \zeta B^n \text{ 是奇异的}\}$ 是 $\det(A^m J - J \zeta B^n) = 0$ 在 Z^2 上的解集. (3.1)

根据前面的讨论,(3.1)式中有如下几种情况:

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$,此时,

$$(ad-bc)(\alpha\beta)^m + (ad-bc)\zeta^2(\rho\sigma)^n - ada^m\zeta\rho^n - ad\beta^m\zeta\rho^n + bca^m\zeta\rho^n + bc\beta^m\zeta\sigma^n = 0$$

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$,此时,

$$(ad-bc)(\alpha\beta)^m + (ad-bc)\zeta^2\rho^{2n} + \{- (ad-bc) - acn\}\alpha^m\zeta\rho^n + \{- (ad-bc) + acn\}\beta^m\zeta\rho^n = 0$$

c) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$,此时, $(ad-bc)(\alpha^m - \zeta\rho^n)^2 - c^2 mna^m\zeta\rho^n = 0$

在 $\zeta = 1$ 时下面的替换成立:

1) 在 a) 中, $(\alpha, \beta, \rho, \sigma, a, b, c, d)$ 用 $(\rho, \sigma, \alpha, \beta, -d, b, c, -a)$ 代替;在 c) 中, $(\alpha, \rho, a, b, c, d)$ 用 $(\rho, \alpha, -d, b, c, -a)$ 代替,(3.1)式的解保持不变.

2) 在 a) 中 $(\rho, \sigma, a, b, c, d)$ 用 $(\sigma, \rho, b, -a, d, -c)$ 代替,(3.1)式的解保持不变.

3) 在 a) 和 b) 中, $(\alpha, \beta, a, b, c, d)$ 用 $(\beta, \alpha, -c, -d, a, b)$ 代替,(3.1)式的解保持不变.

4) 在 a) 中, $(\alpha, \beta, \rho, \sigma, a, b, c, d)$ 用 $(\beta, \alpha, \sigma, \rho, a, -b, -c, d)$ 代替;在 b) 中, $(\alpha, \beta, a, b, c, d)$ 用 $(\beta, \alpha, a, -b, -c, d)$ 代替,也保持(3.1)式的解不变.

引理 6 设 P 是 I 的一个分割,满足对某个 $k \in Z^+$, H_p 包含下面集合中的一个: $\{\alpha^{km} = \beta^{km} = \rho^{kn}\}$, (情形 a), (b)), (用 $\{\alpha^{km} = \beta^{km} = \rho^{kn}\}$ 表示 $\{(m,n) \mid km = km = kn \text{ 以下相同}\}$; $\{\alpha^{km} = \beta^{km} = \sigma^{kn}\}$; $\{\alpha^{km} = \rho^{kn} = \sigma^{kn}\}$, $\{\beta^{km} = \rho^{kn} = \sigma^{kn}\}$. 如果 $\text{rank } H_p \geq 1$, 则 (A, B) 相关于(1)类形式的矩阵对;如果 $\text{rank } H_p = 2$, 则 (A, B) 相关于(8)或(9)类形式的矩阵对.

定理 2. 假设在(a)中 $abcd = 0$, 或在(b)中 $ac = 0$, 或在(c)中 $c = 0$. 这样如果 ζ 是一 l 次单位根, 且 $S_{A,B}$ 非空, 则 $S_{A,B}$ 是无限集合, 此时 (A, B) 相关与(1)类形式的矩阵对.

证明 利用替换分析(3): (a, b) 替换成 $(-c, -d)$, (c, d) 替换成 (a, b) , α 与 β 互换, 并没有改变矩阵对的相关性, 于是, 可把条件简化为: 在(a)中 $bc = 0$, 或在(b)中 $c = 0$, 或在(c)中 $c = 0$.

由于 (A, B) 相关于 $(N, J^{-1}AJ) =$

$\left[N, \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right]^{-1}$, 在 (a, b, c) 中令 $c = 0$ 即可. 通过代入 $c = 0$, 且 $\det J = ad - bc \neq 0$. (a, b, c) 式分别的到: $(\alpha^m - \zeta\rho^n)(\beta^m - \zeta\sigma^n) = 0$, $(\alpha^m - \zeta\rho^n)(\beta^m - \zeta\sigma^n) = 0$, $(\alpha^m - \zeta\rho^n) = 0$, 根据的替换分析(3)或(4), 对 $S_{A,B}$ 是无限集合的分类讨论只要讨论 $S'_{A,B} = \{(m,n) \in Z^2 \mid \alpha^m = \zeta\rho^n\}$ 即可, 显然, 若 $(r, s) \in S'_{A,B}$, 则有 $(kl + r, kl + s) \in S'_{A,B}$, 任意 $k \in Z$. 取 $(r, s) \in S'_{A,B}$, 则 $A' = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho' & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1}$, 其中, $\alpha' = \zeta\rho'$, 又由 ζ 是 l 次单位根和 $(\alpha')^{l+1} = (\zeta\rho')^{l+1}$, 得出 $(\alpha')^{l+1} = (\zeta\rho')^{l+1}$. 所以, $A^{r(l+1)} = \begin{pmatrix} \alpha^{r(l+1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $B^{s(l+1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{s(l+1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho^{s(l+1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, 于是 (A, B) 相似于(1)类形式的矩阵对.

定理 3. 在定理 2 的条件下, 如果 $\# S_{A,B}(N)/N^N = 1, 2, \dots$ 是无界的, 则 ζ 是一单位根, 并且 (A, B) 相关于(9)类形式的矩阵对.

证明: 根据定理 2 的证明, 在 (a, b, c) 中, $\# S_{A,B}(N)/N(n=1, 2, \dots)$ 是无界的, 当且仅当 $\# S_{A,B}(N)/N(n=1, 2, \dots)$ 是无界的. 对于 $S'_{A,B} = \{(m, n) \in Z^2 \mid \alpha^m = \zeta\rho^n\}$, $H_p = \{(r, s) \mid \alpha^r = \rho^s\}$, 显然, 任意 $S'_{A,B}$ 中的 (m, n) 都有 $\alpha^{m+kr} = \zeta\rho^{n+ks}$; 另外, 如果对任意的 $(m', n') \in S'_{AB}$, 都有 $(m' - m, n' - n)$ 是线性相关的, 则存在 $(r, s), (m_0, n_0)$, 对任意的 $(m, n) \in S'_{AB}$ 有, $(m, n) = (m_0 + n_0) + k(r, s)$, 此时, $\# S_{A,B}(N)/N(n=1, 2, \dots)$ 是有界的, 所以, H_p 的秩是 2. 即存在线性无关的 $(r_1, s_1), (r_2, s_2)$ 使得 $\alpha^{r_1} = \rho^{s_1}, \alpha^{r_2} = \rho^{s_2}$, 于是 $\alpha^{r_1 s_2 - r_2 s_1} = 1, \alpha$ 是一单位根; 同理, ρ 也是一单位根. 于是, ζ 也是一单位根(设为 l 次). 此时, (A, B) 相关于(9)类形式的矩阵对.

定理 4. 同样假设在(a)中, $abcd = 0$, 或在(b)中, $ac = 0$, 或在(c)中, $c = 0$. 如果 ζ 不是单位根, 而 ρ 是单位根, 且 $S_{A,B}$ 非空, 则 $S_{A,B}$ 是一无限集合, (A, B) 相关于(7)类形式的矩阵对, 并且对任意的 $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in S_{A,B}$, 均有 $r_1 = r_2$; 类似地, 如果 ζ 不是单位根, 而 α 是单位根, 且 $S_{A,B}$ 非空, 则 $S_{A,B}$ 是一无限集合, (A, B) 相关于(8)类形式的矩阵对, 且对任意的 $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in S_{A,B}$, 均有 $s_1 = s_2$.

证明: 根据替换分析, 仅考虑 $S' = \{(m, n) \in Z^2 \mid \alpha^m = \zeta\rho^n\}$ 即可.

设 $(r_1, s_1) \in S'$, 由 S_1 的周期性, $S_{A,B}$ 是一无限集合, 若 $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in S'$, 且 $r_1 \neq r_2$, 有 $\alpha^{r_1} = \zeta \rho^{s_1}, \alpha^{r_2} = \zeta \rho^{s_2}$, 得出 $\alpha^{r_1-r_2} = \rho^{s_1-s_2}$, 由于 ρ 是单位根, 这样, 若 α 是单位根, ζ 也必是单位根, 与题设矛盾. 第二种情况类似得证.

下面假设, $(a)abcd \neq 0, (b)ac \neq 0, (c)c \neq 0$. 在 (a, b, c) 中, 用 $f_i(H)\alpha_i$ 表示从等式左边起的第 i 项.

定理 5.1⁰ 在 (a, b, c) 中, 存在某个分割 P , 满足 $\text{rank}H_p \geq 1$ 且 U_p 是无限集合, 则 (A, B) 相关于 (1), (2), (3) 或 (4) 类形式的矩阵对. 2⁰ 设对某个分割 P 和 $\beta \in Z^2$, 有 $\text{rank}H_p = 2$, 且对每个 $H \in \beta + H_p$, 有 $\sum_{i \in I} f_i(H)\alpha_i^H = 0, (i = 1, 2, \dots, t,)$, 则 (A, B) 相关于 (5) 或 (6) 类形式的矩阵对.

证明: 这里只给出情形 (b) 的简要证明, 其它情况类似可证.

(b1) 分割 P 包含单个元的集合: $f_1(H) = ad - bc, f_2(H) = ad - bc$, 是非零常数, 由 $f_3(H) = -(ad - bc) - acn = 0$ 得出 $n = -(ad - bc)/ac$, 由 $f_4(H) = -(ad - bc) + acn = 0$ 得出 $n = (ad - bc)/ac$.

根据 U_p 的定义, P 不能包含子集合 $\{1\}$ 或 $\{2\}$, 且 P 至多包含子集合 $\{3\}$ 或 $\{4\}$ 中的一个. 于是, 由分割 $P = \{\{1, 2, 4\}, \{4\}\}$ 得出, $H_p = \{(a\beta)^m\} = \rho^{2n} = \beta^m \rho^n$, 或 $H_p = \{(a\beta)^m\} = \rho^{2n} = \alpha^m \rho^n$, 无论哪一种情况都有 $H_p = \{\alpha^m = \beta^m = \rho^n\}$, 由引理 6 定理 5 得证.

(b2) 分割 $P = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, 或 $P = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$: 根据替换分析, 仅考虑 $P = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ 即可, 对于这样的分割 P 有: $U_p = \{(ad - bc)(a\beta)^m +$

$$[-(ad - bc) + acn]\zeta\beta^m\rho^n = 0\}$$
$$U_p = \{(ad - bc)\zeta^2\rho^{2n} + [-(ad - bc) + acn]\zeta\beta^m\rho^n = 0\}, H_p = \{\alpha^m = \rho^n\}$$

对于 $(m, n) \in U_p$, 有 $[1 - acn/(ad - c)][1 + acn/(ac - bc)] = [\frac{\alpha^m}{\zeta\rho^n}][\frac{\zeta\rho^n}{\alpha^m}] = 1$,

由前面的假设 $ac \neq 0$, 所以, 只有 $n = 0$, 于是: $U_p = \{\alpha^m = \zeta, n = 0\}$, 由 U_p 是一无限集合, 可得 ζ 是一单位根 (设为 l 次), $A^m = \begin{pmatrix} \zeta & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$,

显然, (A, B) 是 (5) 类形式的矩阵对. 当 $\text{rank}H_p = 2$ 时, 由于分割 $P = \{P_1, P_2\}$, 其中, $P_1 = \{1, 4\}, P_2 = \{2, 3\}$; 并且 U_p 是 $\{\sum_{i \in P_j} f_i(H)\alpha_i^H = 0, (j = 1, 2)$ 的解集, 又, $U_p = \{\alpha^m = \zeta, n = 0\}$, 如果 $\text{rank}H_p = 2$, 不可能存在 $\alpha \in Z^2$ 使得对每一个 $H \in \alpha + H_p$ 都有 $\sum_{i \in P_j} f_i(H)\alpha_i^H = 0, (j = 1, 2)$. 于是, 这个分割 P 不满足命题 2⁰ 的假设. 此时, 对于情形 (b), $S_{A,B}(N)/N, n = 1, 2, \dots$ 不可能是无界的.

参考文献:

[1] Brown. G. and Moran. W. , Schmidt ' s conjecture on normality for commuting matrices, Invent. Math111(1993) , 449 ~ 463.

[2] Lech. C. . A note on recurring series. Akk. Math. 2(1953) , 417 ~ 421.

[3] Laurent. M. . E quations exponentielles - pelynômes et suites récurrentes linéaires II . J. Number Theory 31(1989) , 24 - 53.

[4] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 科学出版社, 1998.

[5] 北京大学几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 高等教育出版社, 1998.

A Research on 2 × 2 Exponential Matrix Equations

JIANG Zheng-tao¹, YUAN Ping-zhi²

(1. Research Department; 2. Department of Mathematics, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Several types of matrix pairs (A, B) of $GL_2(C)$ are given when the exponential polynomial equation $A^m - \zeta B^n$ is singular.

Key words: matrix pairs, exponential polynomial equations.