

文章编号 :1005 - 0523 (2002) 01 - 0028 - 03

基于 Matlab 的单自由度振动系统的数学仿真实验

张 予¹, 杨福运¹, 吕绍棣¹, 刘晓薇²

(1. 华东交通大学 土木建筑学院, 江西南昌 330013 2. 南昌高等专科学校, 南昌 330009)

摘 要: 根据单自由度振动系统数学模型, 设计了单自由度振动系统的数学仿真实验, 实验结果给出了振动方程的数值解, 并用几何方式定量描述了振动过程和频幅特性。
关 键 词: Matlab; 单自由度振动系统; 振动曲线; 数学仿真实验; 频幅特性
中图分类号: O325; TP312MA; TP391. 9 文献标识码: A

0 引 言

单自由度系统受简谐荷载 $P(t) = F\sin\theta t$ 强迫振动在考虑粘滞阻尼力的振动方程是一个二阶非齐次线性微分方程^[1]

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m}\sin\theta t$$

式中: ξ 为阻尼比, $\xi = C/C_{cr}$, c 为阻尼常数, C_{cr} 为临界阻尼常数; ω 为体系自振频率; θ 为简谐激励荷载的激励频率。

通过调整振动方程的参数, 可以得到各类振动微分方程。笔者以 Matlab5. 3 为工具, 求出了振动微分方程的数值解, 生成了振动曲线, 并作了有阻尼强迫振动的数学仿真实验, 得出一些有用的结论。

1 参数设定与求解

体系自振频率 $\omega = 2$, F/m 不妨设为 1, 阻尼比 $\xi = 0. 15$, 激励频率 θ 分别为 0. 02, 2, 6(单位为 rad/sec) 3 种情况。应用 Matlab 中的常微方程求解器(ODE45)^{[2], [3]}, 求解过程如下:

```
1)  $\theta = 0. 02 \text{ rad/sec}$   
syms t  
diff_equ = ' D2y + 0. 6 * Dy + 4 * y = sin(0. 02 *  
t) ' ;  
y = dsolve(diff_equ)
```

求解结果:

$$y = -12500/33326967 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) + 1388750/11108989 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) - 1388750/11108989 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) - 12500/33326967 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) + 1388750/11108989 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) - 1388750/11108989 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) - 12500/33326967 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) - 12500/33326967 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) - 12501250/13030844097 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) * 391^{(1/2)} - 265250/4343614699 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) * 391^{(1/2)} + 12501250/13030844097 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t) * \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) * 391^{(1/2)}$$

收稿日期: 2001 - 05 - 09
作者简介: 张 予(1970 -), 男, 浙江永康人, 华东交通大学讲师。

$-265250/4343614699 * \cos(1/10 * 391^{(1/2)} * t)$
 $* \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) * 391^{(1/2)}$
 $+ 265250/4343614699 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t)$
 $* \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) * 391^{(1/2)}$
 $+ 12501250/13030844097 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t)$
 $* \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} + 1) * t) * 391^{(1/2)}$
 $(1/2) + 265250/4343614699 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t)$
 $* \cos(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) * 391^{(1/2)}$
 $(1/2) -$
 $12501250/13030844097 * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t)$
 $* \sin(1/50 * (5 * 391^{(1/2)} - 1) * t) * 391^{(1/2)}$
 $(1/2) + C1 * \exp(-3/10 * t) * \cos$
 $(1/10 * 391^{(1/2)} * t) + C2 * \exp$
 $(-3/10 * t) * \sin(1/10 * 391^{(1/2)} * t).$
2), 3) 中 $\theta = 2 \text{ rad/sec}$, $\theta = 6 \text{ rad/sec}$ 求解过程与 1) 类似, 解的结构也类似, 在此省略.

2 振动过程的数学仿真实验

作者应用 Matlab5.3 的 Simulink 软件包对单自由度系统受简谐激励荷载的强迫振动的动态系统进行了建模、仿真和分析. Simulink 的实时工作环境 (Real - Time Workshop) 能自动由模块图生成 C 语言代码, 实现嵌入式实时控制与仿真^[4]. 仿真模块图参见图 1.

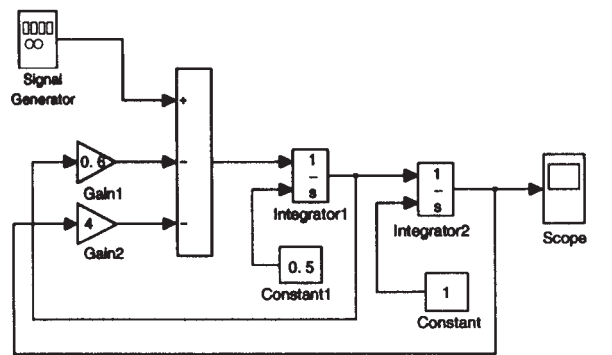
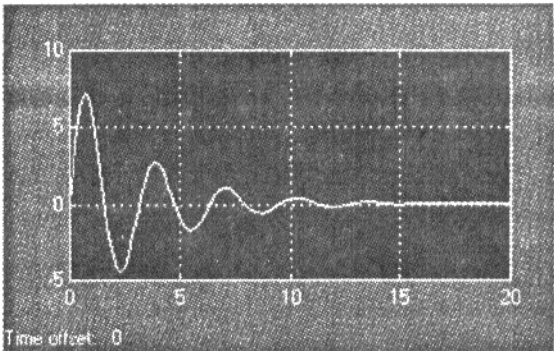


图 1 单自由度系统振动仿真模型

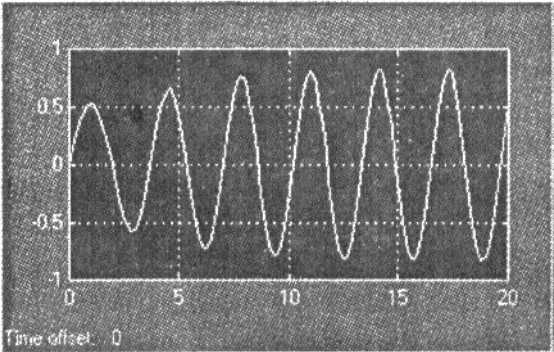
在该模型中, 包含有一个 Sum 模块, 二个 Integrator 模块和二一个 Gain 模块组成的二个回路, 在该方程中, 使用 Signal Generator 模块并选择 Sine Wave 的形式, 将其缺省的单位设为 rad/sec. 使用 Scope 模块显示输出. 输出显示了位移 y 的结果, 对于一个持续 20sec 的仿真, 输出结果参见图 2.

1) $\theta = 0.02 \text{ rad/sec}$, 图 2(a).
荷载频率较小, 体系振动较慢, 近似于衰减振动.

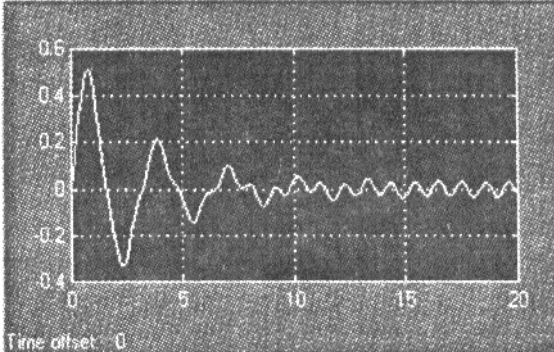
2) $\theta = 1.99 \text{ rad/sec}$, 图 2(b).
共振, 此时振幅较大, 最大振幅 $A \approx 0.8$.
3) $\theta = 6 \text{ rad/sec}$, 图 2(c).
荷载频率较大, 体系振动较快, 平稳阶段振幅 $A \approx 0.03$.
有阻尼受迫振动的解由两项组成, 衰减项和频率为 θ 的受迫振动项, 激励荷载频率 θ 不同, 系统的响应也不同, 通过相应的振动曲线可以定量观察相同阻尼下的幅频特性以及有阻尼受迫振动的过渡阶段的衰减和稳态过程的振动. 调整各项参数和输入不同的初始条件, 可以观测到振动形式的精确几何描述.



(a) $\theta = 0.02 \text{ rad/sec}$



(b) $\theta = 2 \text{ rad/sec}$



(c) $\theta = 6 \text{ rad/sec}$

图 2 系统响应仿真输出

3 结论

动力位移放大系数

$$\beta = \left\{ \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

式中: β 为动力位移放大系数; θ/ω 为扰动频率与自振频率的比值; ξ 为阻尼比.

根据上式确定的曲面称频幅特性曲面可以由 mesh() 函数绘制, 其调用方法是 mesh(x, y, z), 其中 x, y, z 是网格上的三坐标矩阵. 一般情况下, x 和 y 由 meshgrid() 函数生成.

首先可以调用 meshgrid() 函数生成 x 和 y 平面的网格表示. 该函数的调用意义十分明显, 即可以产生一个横坐标起始于 0, 中止于 1.0, 步距为 0.008; 纵坐标起始于 0, 中止于 3.0, 步距为 0.008 的网格分割. 然后由公式计算出曲面的 z 矩阵. 最后调用 mesh() 函数绘制曲面的三维表面网格图形. 参见图 3. 网格图的生成命令如下^[5]:

```
x = 0: 0.008: 1.0; y = 0: 0.008: 3.0; [x, y] = meshgrid(x, y);
z = (sqrt((1 - y.^2).^2 + 4 * x.^2 * y.^2)).^(-0.5) + eps;
mesh(x, y, z); axis tight; xlabel('阻尼系数 \ xi', 'fontweight', 'bold');
ylabel('频比 / theta / omega', 'fontweight', 'bold');
zlabel('动力位移放大系数 beta', 'fontweight', 'bold');
```

图中曲面上各点的 β 坐标表示不同阻尼和不同频率时的振幅, 由此可以看出 ξ 值连续变化时的幅频关系, 在 $\theta/\omega = 1$ 附近阻尼对振幅有显著的影

响. 此时

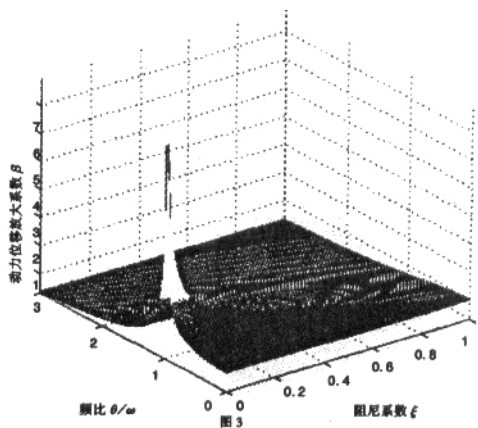


图 3 振动系统的频幅特性曲面

$$\beta = \frac{1}{2\xi}$$

当 $\xi \rightarrow 0$ 时, 无阻尼体系共振时动力系数趋于无穷大; 当考虑阻尼 ξ 的影响时, 动力系数为一个有限值, $\xi = 1, \beta = 1/2$.

参考文献:

[1] 龙驭球, 包世华. 结构力学[M](下册). 第2版, 北京: 清华大学出版社, 1995, 163 ~ 180
[2] 程卫国, 冯峰, 等. MATLAB5.3 应用指南[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1999.
[3] 许波, 刘征. MATLAB 工程数学应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
[4] 陈桂明, 张明照, 等. 应用 MATLAB 建模与仿真[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[5] http://matlab_world.myetang.com/my_lectures_2.htm.

Mathematical Simulation Experiment of Single-Freedom Vibration System's Characteristic Based on Matlab

ZHANG Yu¹, YANG Fu-yun¹, LU Shao-di²

(School of Civil Eng. and Arc., East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: The mathematical simulation experiment of single-freedom vibration system is designed by it's module. The experiment gives the result of vibration differential equation's numerical solution. The vibration's process, feature of vibration amplitude and frequency are described in geometric quantitative analysis's way.

Key words: Matlab; single - freedom vibration system; vibration curves; mathematical simulation experiment; feature of vibration amplitude and frequency