文章编号:1005－0523(2002)02－0059－03

等参有限元矩阵中形函数的建立

章新苗，林智斌，吴丽丽

(南昌市长[illegible]外商投资工业区管委会,江西 南昌 330100)

摘要:在动力问题的分析中,刚度矩阵和质量矩阵的组集是基础,这就涉及到结构形函数的构造.本文列出了各种等参有限元矩阵形函数,提出了将可变节点形式引入到形函数中的方法,通过算例分析,表明本文所提出方法是有效的.

关 键 词:形状函数;等参元;可变节点

中图分类号:TU313.1 **文献标识码**:A

0 引 言

动力问题分析中的一个非常基本,也是非常重要的一步就是计算有限元矩阵,由于等参元的引入,使矩阵的组集更为精确、有效.但在实际中形函数的形式往往比较单一,为此本文用可变节点形式引入到形函数中,列出各种问题中的形函数形式,使其更加灵活.

为了阐述可变节点情况,首先引入 I_{ij}

$$I_{ij}=\begin{cases}1 & ij\text{ 存在时}\\ 0 & ij\text{ 不存在时}\end{cases}$$

因而下文 I_s, I_{st}, I_{str}即为此节点存在时为1,其余为0 (1)

1 杆单元等参元形函数

杆的位移函数 $U=\sum_{i=1}^{d}N_iu_j+\sum_{i=k+1}^{n+1}I_iN_iu_j$ (2)

其中,N_i 由文[1]可得,拉格朗日插值公式.

即 $$N_S=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n+1}\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j} \quad (3)$$

为了反映角节点对边线上的节点的影响,引入一个影响系数 δ_{ij},此影响系数是由 N_i 本身定义得出的.因而,综合考虑到节点间的影响,容易得出,由于用拉格朗日公式可直接推得边线上的节点形函数,因而在此不考虑边线上节点间的影响,即边线上的节点对其它节点影响不考虑,$\delta_{ij}=0$,而角节点则由其定义可知,它将影响与该角节点共线的边线上节点,即它将影响相邻节点,$\delta_{ij}=C$.当边线上节点正好在中点时,则 $\delta_{ij}=\frac{1}{2}$.并且当边线上某一节点不存在时,则由余下节点等份边线而得新的 δ_{ij},即 I_s, I_{st}, I_{str}影响 δ_{ij}

因而由(3)式可得

$$N_S=I_s\prod_{\substack{a=1\\ a\neq s}}^{n+1}\frac{\xi-\xi_a}{\xi_s-\xi_a} \quad (S\text{ 节点不是角节点}) \quad (4)$$

$$N_i=\overline{N_i}-\sum_{m=k}^{q}I_s\,\delta_{is}\,N_s \quad (5)$$

$$\overline{N_i}=\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j} \quad (6)$$

其中,$i\neq j$, j 为与 I 两点之间存在边线的角节点.

从(4)、(5)式可知,只有角节点形函数发生变化,由影响系数决定,其余节点仍采用拉格朗日形式,而且(4)、(5)式中引入了 I_s,从而使它成为可变节点形函数.

2 二维平面问题

1) 对于域内含有节点的平面问题

收稿日期:2001－09－30

作者简介:章新苗(1960－),男,江西奉新人,工程师

中国知网 https://www.cnki.net

$$U=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} N_{ij}\,u_{ij}+\sum_{i=p+1}^{m+1}\sum_{j=q+1}^{n+1} I_{ij}\,N_{ij}\,u_{ij} \tag{7}$$

可以直接采用拉格朗日公式：

$$N_{ij}=L_i(\xi)L_j(\eta)$$

$$L_i(\xi)=\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{m+1}\frac{\xi-\xi_s}{\xi_i-\xi_s} \tag{8}$$

$$L_j(\eta)=\prod_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{n+1}\frac{\eta-\eta_t}{\eta_j-\eta_t} \tag{9}$$

同样可引入 I_{st} 变量，可得到可变节点形式：

角节点插值函数 $N_{ij}=\overline{N_{ij}}-\sum\sum I_{st}\delta_{ist}N_{st}$ (10)

边节点插值函数

$$N_{st}=L_i(\xi)L_j(\eta)=I_{st}\prod_{\substack{a=1\\ a\neq s}}^{m+1}\prod_{\substack{b=1\\ b\neq t}}^{n+1}\frac{\xi-\xi_a}{\xi_s-\xi_a}\,\frac{\eta-\eta_b}{\eta_t-\eta_b} \tag{11}$$

N_{ij} 为共线角节点间的插值.

$$\overline{N_{ii}}=L_i(\xi)L_i(\eta)=\frac{\xi-\xi_I}{\xi_I-\xi_J}\,\frac{\eta-\eta_K}{\eta_I-\eta_K} \tag{12}$$

其中，j,k 分别为与 I 两点之间存在边线的角节点.

2) 对于节点均布置在单元边界上的情况

由于节点在边界上，角节点不能直接采用拉格朗日公式，但其余节点如上所述，因此，

角节点插值函数 $N_{ii}=\overline{N_{ii}}-\sum\sum I_{st}\delta_{ist}N_{st}$ (13)

边节点插值函数

$$N_{st}=L_i(\xi)\,L_j(\eta)=I_{st}\prod_{\substack{a=1\\ a\neq s}}^{m+1}\prod_{\substack{b=1\\ b\neq t}}^{n+1}\frac{\xi-\xi_a}{\xi_s-\xi_a}\,\frac{\eta-\eta_b}{\eta_t-\eta_b} \tag{14}$$

N_{ij} 为共线角节点间的插值.

$$N_{ij}=L_i(\xi)L_j(\eta)=\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j}\,\frac{\eta-\eta_k}{\eta_i-\eta_k} \tag{15}$$

其中，j,k 分别为与 I 两点之间存在边线的角节点.

3 空间问题

对于空间等参元，同样会存在内部节点问题及布置在单元边界上的情况，但都可统一写成

$$N_{str}=I_{str}\times\prod_{\substack{a=1\\ a\neq s}}^{m+1}\prod_{\substack{b=1\\ b\neq t}}^{n+1}\prod_{\substack{c=1\\ c\neq r}}^{p+1}\frac{\xi-\xi_a}{\xi_s-\xi_a}\,\frac{\eta-\eta_b}{\eta_t-\eta_b}\,\frac{\zeta-\zeta_c}{\zeta_r-\zeta_c} \tag{16}$$

$$N_{iii}=\overline{N_{iii}}-\sum\sum\sum I_{str}\delta_{istr}N_{str} \tag{17}$$

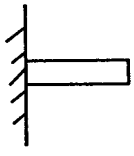
$$N_{iii}=L_i(\xi)L_i(\eta)L_i(\zeta)=\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j}\,\frac{\eta-\eta_k}{\eta_i-\eta_k}\,\frac{\zeta-\zeta_l}{\zeta_i-\zeta_l} \tag{18}$$

其中，$i\neq j,k,l$. j,k,l 为与 I 之间存在边线的角节点.

采用上述方法，将可变节点形式引入到形函数中的形式，再由虚功原理，可进一步推导出刚度矩阵及质量矩阵.

4 算例

以如图所示的悬臂板的基本自振频率求解为例.



板的物理和几何意义：泊松比 $\gamma=0.3$，厚度 $t=0.1$，边长为 10 的方板.

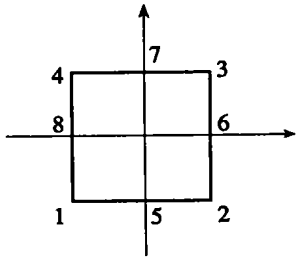
建立 4—8 节点的形函数

$$N_1=\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}-I_5\delta_{51}N_5-I_8\delta_{81}N_8$$

$$N_2=\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}-I_5\delta_{52}N_5-I_6\delta_{62}N_6$$

$$N_3=\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}-I_6\delta_{63}N_6-I_7\delta_{73}N_7$$

$$N_4=\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}-I_7\delta_{74}N_7-I_8\delta_{84}N_8$$



$$N_5=\frac{I_5}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6=\frac{I_6}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7=\frac{I_7}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8=\frac{I_8}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

以此可变形函数组集[k]与[m]来求解其基本自振频率.

其中，有限元程序中，数据输入项中增加 I 与 δ 的输入项. 在此只例举了 4 与 8 节点

中国知网 https://www.cnki.net

	I 与 δ 数据输入项	基本自振频率
4 节点	$I_5=I_6=I_7=I_8=0$, $\delta_{51}=\delta_{52}=\delta_{62}=\delta_{63}=\delta_{73}=\delta_{74}=\delta_{84}=\delta_{81}=0$	$0.207\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
8 节点	$I_5=I_6=I_7=I_8=1$, $\delta_{51}=\delta_{52}=\delta_{62}=\delta_{63}=\delta_{73}=\delta_{74}=\delta_{84}=\delta_{81}=\frac{1}{2}$	$0.206\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

同样可根据需要,先列出 $m-n$ 可变节点形函数,直接在数据输入项中改变 I 与 δ 的输入来求其各节点的基本自振频率.

以上可知,直接用可变形函数来组集[k]与[m],然后在有限元程序中数据输入项中增加 I 与 δ 的输入项,使其更加灵活地根据需要来输入节点个数,并且避免了由于以往形函数单一形式只有通过改变[n]及其一系列项来求其他形式的解,而本文仅需改变 I 与 δ 的输入项就可求得各节点的解(在 $m-n$ 范围),这样就可以通过比较选出满足精度要求的节点个数,为下一步动力求解带来方便.

5　结论

有限元法的研究应着重于形函数的构造,单元列式的简化,本文给出的各问题的等参元形函数是一种通用的形式,当然有限元法形函数构造有许多其余方法,并且今后有限元特别注重与其它数值分析方法的结合,象杂交元、样条元等,这些都将推动有限元法的发展.

参考文献:

[1] 李庆杨. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[2] K.L. 巴特, E.L. 威尔逊. 有限元分析中的数值方法[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[3] 王守信. 有限元法教程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1994.

Shape Function for Isoparametric Element Matrix

ZHANG Xin-miao, LIN Zhi-bin, WU Li-li

(Presidential Committee of Foreign Investment Industrial Region of Changleng, Nanchang City, Nanchang 330100, China)

Abstact: It is of vital importance to form the stiffness matrix and mass matrix in the analysis of dynamic problems. So, in this paper, the choice of structural shape function is concerned about, various kinds of shape functions for isoparametric element are presented, and it is shown that the method introduced here is effective and accurate by using the certification of some ensamples.

Key words: shape function; isoparametric element; variable nodes

中国知网　https://www.cnki.net