文章编号：1005－0523(2002)02－0078－03

周期数列及其应用

周学松，李　季，刘二根

(华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌 330013)

摘要：利用参考文献[1]中定理 1 及周期数列的特点给出组合数的一些新性质．

关　键　词：周期数列；导数；恒等式．

中图分类号：O157.5　　　　**文献标识码**：A

定义 1：$\forall n\in N$，若 $\exists k\in N$，使 $a_n=a_{n+k}$，则称数列 $\{a_n\}$ 是周期为 k 的周期数列．

定理 1 若 $U_1=c(\neq 0$ 或 $1)$ 为任何实数，则由递推关系：$U_{n+1}=1-1/U_n\ (n\geq 1)$ 给出的数列是周期为 3 的数列．

证明 $U_1=c\Rightarrow U_2=\dfrac{c-1}{c}\Rightarrow U_3=\dfrac{1}{c-1}\Rightarrow U_4$

$$=1-1/U_3=c.$$

因此 $\{U_n\}$ 是周期为 3 的数列．

定理 2 若 $U_1=c(\neq 0$ 或 $1/\sqrt{2})$ 为任何实数，则由递推关系：$U_{n+1}=\sqrt{2}-1/U_n\ (n\geq 1)$ 确定的数列是周期为 4 的周期数列．

证明 由 $U_1=c\Rightarrow U_2=\dfrac{\sqrt{2}c-1}{c}\Rightarrow U_3=\dfrac{c-\sqrt{2}}{\sqrt{2}c-1}\Rightarrow$

$$U_4=-1/(c-\sqrt{2})\Rightarrow U_5=\sqrt{2}-1/U_4=c.$$

得 $\{U_n\}$ 是周期为 4 的数列．

引理 1（[1]中定理 1）：由递推关系：

$$(a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0)\qquad U_1=c,\ U_{n+1}=a+\frac{b}{U_n}$$

$(n\geq 1)$ 给出的数列其通项公式为（规定：$k<0$ 时 $\sum_{j=0}^{k}f(j)=0$）

$$U_n=\begin{cases}\dfrac{c\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^{j}+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}a^{2k-2-2j}b^{j}}{c\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-2-2j}b^{j}+b\sum_{j=0}^{k-2}C_{2k-3-j}^{j}a^{2k-3-2j}b^{j}} & n=2k \\ \qquad k=1,2\cdots & \\ \dfrac{c\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}a^{2k-2j}b^{j}+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^{j}}{c\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}a^{2k-1-2j}b^{j}+b\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-2-j}^{j}a^{2k-2-2j}b^{j}} & n=2k+1\end{cases}$$

引理 2（[2]中的定理 5）$k\in N$，则

$$(ii)\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}2^{k-j}(-1)^{j}=\begin{cases}-1, k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)\text{或 }k\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)\\ 1, k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)\text{或 }k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

定理 3 $\forall k\in N$

$$\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=\begin{cases}0, k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\\ 1, k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\\ -1, k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$$

证明 由递推关系：$U_1=c(\neq 0$ 或 $1)$，$U_n=1-\dfrac{1}{U_{n-1}}(n\geq 2)$ 给出的数列是周期为 3 的周期数列，当 $k=3,6,9\cdots$ 时，$2k+1=7,13,\cdots$，由定理 1 知，$U_{2k+1}=U_1$ 再由引理 1 得：

$c\sum_{j=0}^{k}C_{2k-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=c\cdot(c$

收稿日期：2001－10－09

作者简介：周学松(1956－)，男，湖北武汉人，华东交通大学教授．

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}(-1)^{j})$$

对 c 求二阶导数得:

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=0 \qquad k=3,6,9,\cdots \qquad (1)$$

当 $k=1,4,7\cdots$ 时, $2k+1=3,9,15,\cdots$,由定理 1 知, $U_{2k+1}=U_3$,再由引理 1 得:

$$c\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}$$

$$=\frac{-1}{c-1}\cdot(c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}(-1)^{j})$$

两边乘以 $c-1$ 并对 c 求二阶导数得:

$\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j}=0 \qquad k=1,4,7\cdots$,代回原式得:

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{t} C_{2t-j}^{j}$$

$k=1,4,7,\cdots;t=k-1=0,3,6,$

下面证明: $t=0,3,6,\cdots$ 时,有 $\sum_{j=0}^{t} C_{2t-j}^{j}(-1)^{j}=1$

$t=0$ 时,结论显然成立.

假设 $t=3m$ 时结论成立,即

$$\sum_{j=0}^{3m} C_{2\cdot 3m-j}^{j}(-1)^{j}=1 \quad (m\geq 1)$$

下面证明 $t=3(m+1)$ 时结论也成立:(规定 $C_n^k=0$, $n<k$ 时)

因 $\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot 3(m+1)-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{3m+3}(C_{2\cdot 3(m+1)-1-j}^{j}+C_{2\cdot 3(m+1)-1-j}^{j-1})(-1)^{j}$

$$=\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2.3(m+1)-2-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot 3(m+1)-2-j}^{j-1}(-1)^{j}$$

$$-\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot 3(m+1)-2-(j-1)}^{j-1}(-1)^{j-1}$$

$$=\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot(3m+2)-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{3m+3}(C_{2\cdot(3m+2)-1-(j-1)}^{j-1}$$

$$(-1)^{j-1}-\sum_{i=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-i}^{i}(-1)^{i}$$

$$=\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{i=0}^{3m+2}(C_{2\cdot(3m+2)-1-i}^{i}(-1)^{i}$$

$$-\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-j}^{j}(-1)^{j}$$

$$=-\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-1-j}^{j}(-1)^{j}=-\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-2-j}^{j}$$

$$(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-2-j}^{j-1}(-1)^{j}$$

$$=-\sum_{j=0}^{(3m+2)-1} C_{2\cdot(3m+2)-2-j}^{j}(-1)^{j}+$$

$$\sum_{j=0}^{3m+2} C_{2\cdot(3m+2)-3-(j-1)}^{j}(-1)^{j-1} \qquad (2)$$

又因 $k=2,5,8\cdots$ 时, $2k+1=5,11,17,\cdots$,有 $U_{2k+1}=U_2$,由引理 1 得:

$$c\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=\frac{c-1}{c}\cdot$$

$$(c\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}(-1)^{j})$$

两边乘 c 且对 c 求二阶导数得:

$$\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j} \quad k=2,5,8\cdots$$

代回原式化简得:

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}(-1)^{j}=0 \qquad k=2,5,8\cdots \qquad (3)$$

而(2)式中的 $3m+2=2,5,8\cdots$,因此(2)式变为:

$$\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot 3(m+1)-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{3m+1} C_{2\cdot(3m+2)-3-j}^{j}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{3m+1} C_{2\cdot 3m+1-j}^{j}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{3m+1} C_{2\cdot 3m-j}^{j}(-1)^{j}+\sum_{j=0}^{3m+1} C_{2\cdot 3m-j}^{j-1}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{3m} C_{2\cdot 3m-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{3m+1} C_{2\cdot 3m-1-(j-1)}^{j-1}(-1)^{j-1}$$

由归纳假设得

$$=1-\sum_{j=0}^{3m} C_{2\cdot 3m-1-j}^{j}(-1)^{j}$$

$$=1-\sum_{j=0}^{3m-1} C_{2\cdot 3m-1-j}^{j}(-1)^{j}$$

由 $3m=3,6,9,\cdots$ 及(1)式得:

$$\sum_{j=0}^{3m-1} C_{2\cdot 3m-1-j}^{j}(-1)^{j}=0$$

因此 $\sum_{j=0}^{3m+3} C_{2\cdot 3(m+1)-j}^{j}(-1)^{j}=1$ 由归纳法得证:

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=1 \qquad k=1,4,7\cdots \qquad (4)$$

最后由(3)得:

$$0=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j-1}(-1)^{j}$$

$k=2,5,8\cdots$

$$\Rightarrow\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j-1}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2(k-1)-1-(j-1)}^{j-1}(-1)\cdot(-1)^{j-1}$$

$$=-\sum_{j=0}^{t-1} C_{2t-1-j}^{j}(-1)^{j}(t=k-1=1,4,7,\cdots)$$

$$\underline{(4)}-1(5)$$

由(1)(4)(5)得证定理.

定理 4 $\forall k\in N$,有

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}2^{k-1}(-1)^{j}=\begin{cases}0, k\equiv 0 \text{ 或 } 2(\bmod 4)\\ 2, k\equiv 1(\bmod 4)\\ -2, k\equiv 3(\bmod 4)\end{cases}$$

证明 由递推关系: $U_1=c(\neq 0$ 或 $1/\sqrt{2})$, $U_n=\sqrt{2}-1/U_{n-1}(n\geq 2)$ 给出的数列,当 $k=2,4,6,\cdots$ 时, $2k+1=5,9,\cdots$,由定理 2 得: $U_{2k+1}=U_1$,又由引理 1 得:

$$C\cdot\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j}2^{k-j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}\frac{1}{\sqrt{2}}2^{k-j}(-1)^{j}$$

$$=c^{2}\cdot\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}\frac{1}{\sqrt{2}}2^{k-j}-c\cdot\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}\frac{1}{2}\cdot 2^{k-j}(-1)^{j}$$

两边对 c 求二阶导得：

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}=0 \qquad k=2,4,6,\cdots \tag{6}$$

当 $k=1,5,9,\cdots$ 时，$2k+1=3,11,19,\cdots$，由定理2得：$U_{2k+1}=U_3$，再由引理1得：

$$(\sqrt{2}c-1)\left(c\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}\frac{1}{\sqrt{2}}2^{k-j}(-1)^{j}\right)=(c-\sqrt{2})\left(c\cdot\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j}\frac{1}{\sqrt{2}}2^{k-j}(-1)^{j}-\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-2-j}^{j}\frac{1}{2}\cdot 2^{k-j}(-1)^{j}\right)$$

两边对 c 求二阶导得：

$$2\cdot\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j} \qquad k=1,5,9,\cdots$$

由引理2中(ii)知：$\sum_{j=0}^{k} C_{2k-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}=1$，$k=1,5,9,\cdots$

因此

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}=2 \qquad k=1,5,9,\cdots \tag{7}$$

当 $k=3,7,11,\cdots$ 时，

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2\cdot(k+1)-3-j}^{j} 2^{(k+1)-j-1}(-1)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{(k+1)-1} C_{2\cdot(k+1)-3-j}^{j} 2^{(k+1)-j-1}(-1)^{j}-C_{2(k+1)-3-k}^{k} 2^{(k+1)-k-1}(-1)^{k}$$

（规定 C_n^k，当 $n>k$ 时）

$$=\sum_{j=0}^{t-1} C_{2t-3-j}^{j} 2^{t-j-1}(-1)^{j}$$

$t=k+1=4,8,12,\cdots$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{t-1}\left(C_{2t-2-j}^{j}-C_{2t-3-j}^{j-1}\right)2^{t-j}(-1)^{j}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{t-1}\left(C_{2t-1-j}^{j}-C_{2t-2-j}^{j-1}-C_{2t-3-j}^{j-1}\right)2^{t-j}(-1)^{j}$$

由(6)式得

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t-1}\left(C_{2(t-1)-j}^{j-1}+C_{2(t-1)-1-j}^{j-1}\right)2^{t-j}(-1)^{j}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(C_{2k-j}^{j-1}2^{k+1-j}(-1)^{j}-\sum_{j=1}^{k} C_{2k-1-j}^{j-1}\right)2^{k-j}(-1)^{j}$$

由引理2中结论(i)得

$$=\sum_{j=1}^{k} C_{2k-1-(j-1)}^{j-1} 2^{k-1-(j-1)}(-1)^{j-1}-1$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}/2(-1)^{j}-1$$

移项整理后得：

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 2^{k-j}(-1)^{j}=-2 \tag{8}$$

由(6)(7)(8)得证定理．

利用本文提出的方法可建立许多恒等式．

我们猜想：

$$(a)\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^{j} 3^{k-j}(-1)^{j}=\begin{cases}3, & k\equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod 6\\ 0, & k\equiv 0 \text{ 或 } 3 \pmod 6 \qquad k\in N\\ -3, & k\equiv 4 \text{ 或 } 5 \pmod 6\end{cases}$$

参考文献：

[1] 周学松等．一类数列的通项公式及其应用[J]．华东交通大学学报 2001，(1)：58～61

[2] 周学松等．一个通项公式在建立恒等式方面的应用[J]．华东交通大学学报 2001，(2)：30～33．

[3] 陈景润．组合数学简介[M]．天津：天津科学技术出版社．1983．

Periodic Sequence and It's Applications

ZHOU Xue-song，LI Ji，LIU Er-gen

(School of Natural Science，East China Jiaotong University，Nanchang，330013，China)

Abstract：In this paper，through using the Theorem 1 in reference[1] and the characteristics of the periodic sequence，obtain some identical relations．

Key words：Sequence；Derivate；Identical relation．