文章编号:1005－0523(2002)02－0081－02

广义图 $K(6, n)$的边色数

刘二根, 任飞正, 周尚超

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:给出了完全图 K_6 的广义图 $K(6, n)$的一种正常边着色法,从而解决了这类图的边色数.

关 键 词:正常边着色;边色数;匹配

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A

1 引 言

本文所讨论的图均为无向简单图,$E(G)$表示图 G 的边集,$V(G)$表示图 G 的点集,文中凡未说明的符号及术语均同于文献[1].

定义 1 图 G 的一个正常边着色 π 是指映射 $\pi: E(G)\rightarrow\{1,2,3,\cdots\}$,使得 G 的任何相邻边不同色.

定义 2 图 G 的一个边 K－着色是用 K 种颜色的一个正常边着色.

定义 3 图 G 的边色数是指使得 G 有一个边 K－着色的最小的数目 K,用 $X'(G)$表示.

1964 年 Vizing 证明了$\triangle(G)\leqslant X'(G)\leqslant\triangle(G)+1$,若 $X'(G)=\triangle(G)$,则称 G 属于第一类,记作 $G\in\wedge_1$,否则称 G 属于第二类,记作 $G\in\wedge_2$.若 G 的边 K－着色 π 的 K 种颜色为$\{1,2,\cdots,K\}$,则 π 将 $E(G)$分解成色类 $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_K$ 的不相交的并,每个边集 E_i 称为 G 一个匹配.

文献[2]作为文献[3]的推广,定义了 K_5 的广义图 $K(5, n)$并给出了它的边色数和相应的一种正常边着色,本文则进一步给出 K_6 的广义图 $K(6, n)$的定义,同时找到了它的一种色数最少的正常边着色,从而确定了这类图的边色数.

定义 4 令 $K(6, 0)=K_6$ 且 $V(K(6, 0))=\{u, \nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}, \nu_4^{(0)}, \nu_5^{(0)}\}$,沿 $\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}, \nu_4^{(0)}, \nu_5^{(0)}$出发作边 $\nu_1^{(0)}\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(0)}\nu_2^{(1)}, \nu_3^{(0)}\nu_3^{(1)}, \nu_4^{(0)}\nu_4^{(1)}, \nu_5^{(0)}\nu_5^{(1)}$,连接 $\nu_1^{(1)}\nu_2^{(1)}, \nu_1^{(1)}\nu_3^{(1)}, \nu_1^{(1)}\nu_4^{(1)}, \nu_1^{(1)}\nu_5^{(1)}, \nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}, \nu_2^{(1)}\nu_4^{(1)}, \nu_2^{(1)}\nu_5^{(1)}, \nu_3^{(1)}\nu_4^{(1)}, \nu_3^{(1)}\nu_5^{(1)}, \nu_4^{(1)}\nu_5^{(1)}$所得到的图记为 $K(6, 1)$,而 $K(6, n)$是由 $K(6, n-1)$通过增加新点 $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \nu_3^{(n)}, \nu_4^{(n)}, \nu_5^{(n)}$及新边 $\nu_1^{(n-1)}\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n-1)}\nu_2^{(n)}, \nu_3^{(n-1)}\nu_3^{(n)}, \nu_4^{(n-1)}\nu_4^{(n)}, \nu_5^{(n-1)}\nu_5^{(n)}, \nu_1^{(n)}\nu_2^{(n)}, \nu_1^{(n)}\nu_3^{(n)}, \nu_1^{(n)}\nu_4^{(n)}, \nu_1^{(n)}\nu_5^{(n)}, \nu_2^{(n)}\nu_3^{(n)}, \nu_2^{(n)}\nu_4^{(n)}, \nu_2^{(n)}\nu_5^{(n)}, \nu_3^{(n)}\nu_4^{(n)}, \nu_3^{(n)}\nu_5^{(n)}, \nu_4^{(n)}\nu_5^{(n)}$所得到.

2 $K(6, n)$的边色数

定理 当 $n\geqslant 1$ 时,$X'(K(6, n))=6$,即 $K(6, n)\in\wedge_1$.

证明 当 $n\geqslant 1$ 时,$\triangle(K(6, n))=6$,设 $E_i^{(n)}$表示图 $K(6, n)$的边着第 i 种颜色的边集,$i=1,2,3,4,5,6$.

当 $n=1$ 时,令

$E_1^{(1)}=\{u\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}\nu_5^{(0)}, \nu_3^{(0)}\nu_4^{(0)}, \nu_2^{(1)}\nu_5^{(1)}, \nu_3^{(1)}\nu_4^{(1)}\}$

收稿日期:2001－09－17

作者简介:刘二根(1965－),男,江西吉水人,华东交通大学副教授.

$E_2{}^{(1)}=\{u\nu_2{}^{(0)}, \nu_3{}^{(0)}\nu_5{}^{(0)}, \nu_1{}^{(0)}\nu_1{}^{(1)}, \nu_4{}^{(0)}\nu_4{}^{(1)}, \nu_3{}^{(1)}\nu_5{}^{(1)}\}$

$E_3{}^{(1)}=\{u\nu_3{}^{(0)}, \nu_1{}^{(0)}\nu_2{}^{(0)}, \nu_4{}^{(0)}\nu_5{}^{(0)}, \nu_1{}^{(1)}\nu_2{}^{(1)}, \nu_4{}^{(1)}\nu_5{}^{(1)}\}$

$E_4{}^{(1)}=\{u\nu_4{}^{(0)}, \nu_1{}^{(0)}\nu_3{}^{(0)}, \nu_2{}^{(0)}\nu_2{}^{(1)}, \nu_5{}^{(0)}\nu_5{}^{(1)}, \nu_1{}^{(1)}\nu_3{}^{(1)}\}$

$E_5{}^{(1)}=\{u\nu_5{}^{(0)}, \nu_1{}^{(0)}\nu_4{}^{(0)}, \nu_2{}^{(0)}\nu_3{}^{(0)}, \nu_1{}^{(1)}\nu_4{}^{(1)}, \nu_2{}^{(1)}\nu_3{}^{(1)}\}$

$E_6{}^{(1)}=\{\nu_1{}^{(0)}\nu_5{}^{(0)}, \nu_2{}^{(0)}\nu_4{}^{(0)}, \nu_3{}^{(0)}\nu_3{}^{(1)}, \nu_1{}^{(1)}, \nu_5{}^{(1)}, \nu_2{}^{(1)}\nu_4{}^{(1)}\}$.

则 $E_1{}^{(1)}, E_2{}^{(1)}, E_3{}^{(1)}, E_4{}^{(1)}, E_5{}^{(1)}, E_6{}^{(1)}$ 为 $K(6, 1)$ 的一个匹配，故 $X'(K(6, 1))=6$，即 $K(6, 1)\in\wedge_1$.

当 $n=2$ 时，令

$E_1{}^{(2)}=E_1{}^{(1)}\cup\{\nu_1{}^{(1)}\nu_1{}^{(2)}, \nu_2{}^{(2)}\nu_5{}^{(2)}, \nu_3{}^{(2)}\nu_4{}^{(2)}\}$

$E_2{}^{(2)}=E_2{}^{(1)}\cup\{\nu_2{}^{(1)}\nu_2{}^{(2)}, \nu_3{}^{(2)}\nu_5{}^{(2)}\}$

$E_3{}^{(2)}=E_3{}^{(1)}\cup\{\nu_3{}^{(1)}\nu_3{}^{(2)}, \nu_1{}^{(2)}\nu_2{}^{(2)}, \nu_4{}^{(2)}\nu_5{}^{(2)}\}$

$E_4{}^{(2)}=E_4{}^{(1)}\cup\{\nu_4{}^{(1)}\nu_4{}^{(2)}, \nu_1{}^{(2)}\nu_3{}^{(2)}\}$

$E_5{}^{(2)}=E_5{}^{(1)}\cup\{\nu_5{}^{(1)}\nu_5{}^{(2)}, \nu_1{}^{(2)}\nu_4{}^{(2)}, \nu_2{}^{(2)}\nu_3{}^{(2)}\}$

$E_6{}^{(2)}=E_6{}^{(1)}\cup\{\nu_1{}^{(2)}\nu_5{}^{(2)}, \nu_2{}^{(2)}\nu_4{}^{(2)}\}$

则 $E_1{}^{(2)}, E_2{}^{(2)}, E_3{}^{(2)}, E_4{}^{(2)}, E_5{}^{(2)}, E_6{}^{(2)}$ 为 $K(6, 2)$ 的一个匹配，故 $X'(K(6, 2))=6$，即 $K(6, 2)\in\wedge_1$.

当 $n\geqslant 3$ 且 $n=2m$ 时，令

$E_1{}^{(2m)}=E_1{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_1{}^{(2m-1)}\nu_1{}^{(2m)}, \nu_2{}^{(2m)}\nu_5{}^{(2m)}, \nu_3{}^{(2m)}\nu_4{}^{(2m)}\}$

$E_2{}^{(2m)}=E_2{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_2{}^{(2m-1)}\nu_2{}^{(2m)}, \nu_3{}^{(2m)}\nu_5{}^{(2m)}\}$

$E_3{}^{(2m)}=E_3{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_3{}^{(2m-1)}\nu_3{}^{(2m)}, \nu_1{}^{(2m)}\nu_2{}^{(2m)}, \nu_4{}^{(2m)}\nu_5{}^{(2m)}\}$

$E_4{}^{(2m)}=E_4{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_4{}^{(2m-1)}\nu_4{}^{(2m)}, \nu_1{}^{(2m)}\nu_3{}^{(2m)}\}$

$E_5{}^{(2m)}=E_5{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_5{}^{(2m-1)}\nu_5{}^{(2m)}, \nu_1{}^{(2m)}\nu_4{}^{(2m)}, \nu_2{}^{(2m)}\nu_3{}^{(2m)}\}$

$E_6{}^{(2m)}=E_6{}^{(2m-1)}\cup\{\nu_1{}^{(2m)}\nu_5{}^{(2m)}, \nu_2{}^{(2m)}\nu_4{}^{(2m)}\}$.

当 $n\geqslant 3$ 且 $n=2m+1$ 时，令

$E_1{}^{(2m+1)}=E_1{}^{(2m)}\cup\{\nu_2{}^{(2m+1)}\nu_5{}^{(2m+1)}, \nu_3{}^{(2m+1)}\nu_4{}^{(2m+1)}\}$

$E_2{}^{(2m+1)}=E_2{}^{(2m)}\cup\{\nu_1{}^{(2m)}\nu_1{}^{(2m+1)}, \nu_4{}^{(2m)}\nu_4{}^{(2m+1)}, \nu_3{}^{(2m+1)}\nu_5{}^{(2m+1)}\}$

$E_3{}^{(2m+1)}=E_3{}^{(2m)}\cup\{\nu_1{}^{(2m+1)}\nu_2{}^{(2m+1)}, \nu_4{}^{(2m+1)}\nu_5{}^{(2m+1)}\}$

$E_4{}^{(2m+1)}=E_4{}^{(2m)}\cup\{\nu_2{}^{(2m)}\nu_2{}^{(2m+1)}, \nu_5{}^{(2m)}\nu_5{}^{(2m+1)}, \nu_1{}^{(2m+1)}\nu_3{}^{(2m+1)}\}$

$E_5{}^{(2m+1)}=E_5{}^{(2m)}\cup\{\nu_1{}^{(2m+1)}\nu_4{}^{(2m+1)}, \nu_2{}^{(2m+1)}\nu_3{}^{(2m+1)}\}$

$E_6{}^{(2m+1)}=E_6{}^{(2m)}\cup\{\nu_3{}^{(2m)}\nu_3{}^{(2m+1)}, \nu_1{}^{(2m+1)}\nu_5{}^{(2m+1)}, \nu_2{}^{(2m+1)}\nu_4{}^{(2m+1)}\}$.

由数学归纳法很容易证明当 $n\geqslant 1$ 时，$E_1{}^{(n)}, E_2{}^{(n)}, E_3{}^{(n)}, E_4{}^{(n)}, E_5{}^{(n)}, E_6{}^{(n)}$ 为 $K(6, n)$ 的一个匹配，故 $X'(K(6, n))=6$，即 $K(6, n)\in\wedge_1$.

参考文献：

[1] F. Harary. Graph ThEory. Addison Wesley. Reading, MA, 1969.

[2] 刘二根. 广义图 $K(5, n)$ 的边色数[J]. 华东交通大学学报. 1997 (2): 85～87.

[3] 刘红美，陈泽乾. 广义 $K(4, n)$ 图和 Griozsch 图 G_n 边着色分类[J]. 数学杂志. 1996 (4): 531～533.

Edge-Chromatic Number of Graph $K(6, n)$

LIU Er-gen, REN Fei-zheng, ZHOU Shang-chao

(School of Natural Science, East China Jiaotong University. Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, a proper colouring method for $K(6, n)$ is given which solves the edge－chromatic number.

Key words: proper edge colouring; edge－chromatic number; matching