第19卷第3期 华东交通大学学报 Vol.19 No.3
2002年9月 Journal of East China Jiaotong University Sep. 2002

文章编号:1005-0523(2002)03-0011-03

有旋与无旋流场中Bernoulli方程守恒探讨

唐朝春, 潘 阳, 江立文

(华东交通大学 土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:基于Euler运动微分方程,以Lamb运动微分方程的形式作进一步分析研究,探讨了Bernoulli积分和Euler积分的物理意义,论述了Bernoulli能量方程在有旋流场和无旋流场中的守恒问题.

关 键 词:Bernoulli方程;守恒;有旋流场;无旋流场;流线;涡线;

中图分类号:TU991.32 **文献标识码**:A

0 前 言

Bernoulli能量方程的应用是非常广泛的,例如Pitot管测流速,Venturi管测流量,Torricelli小孔口出流[1]以及其它方面的诸多计算应用等等.在重力场中,不可压缩理想流体定常流动的Bernoulli能量方程一般形式可以写为,$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=$常数,或$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$,表示单位重量流体的总机械能守恒,位能、压能和动能可以相互转化.在一般的应用中很少考虑有旋流场和无旋流场中守恒的问题,通常知道Bernoulli积分是沿流线积分,Bernoulli能量方程沿流线守恒.现就有旋与无旋流场中Bernoulli方程守恒的问题进行探讨.

1 Lamb运动微分方程

理想流体的Euler运动微分方程为:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1}$$

应用向量导数运算公式[2]

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\nabla(\frac{V^2}{2})-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})=\nabla(\frac{V^2}{2})-\vec{V}\times\vec{\Omega} \tag{2}$$

式中:$\vec{\Omega}$ ——速度矢量的旋度,$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{V}=2\vec{\omega}$[3]($\omega$为平均旋转角速度).用(2)式替换Euler运动方程中的对流导数项,理想流体运动微分方程可写成

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho})-\vec{f}=\vec{V}\times\vec{\Omega} \tag{3}$$

式(3)称为Lamb运动微分方程.

2 Bernoulli积分和Euler积分

2.1 前提条件

1) 理想流体;

2) 定常流动,即$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$;

3) 质量力有势,即$\vec{f}=-\nabla\Pi$,Π称为质量力的势函数;

4) 正压流体,即 $\rho=f(p)$,密度仅是压强的函数.

把以上条件代入式(3)可得

$$\nabla(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi)=\vec{V}\times\vec{\Omega} \tag{4}$$

2.2 Bernoulli积分

收稿日期:2002-03-19

作者简介:唐朝春(1964-),男,安徽和县人,华东交通大学副教授.

中国知网 https://www.cnki.net

在有旋流场中，$\vec{\Omega}\neq 0$，Bernoulli 积分有沿流线积分和沿涡线积分二种情况.

2.2.1 沿流线积分

将方程(4)在流线的切线方向$\vec{S}$上投影[4]，得

$$\vec{S}\cdot\nabla\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=\vec{S}\cdot(\vec{V}\times\vec{\Omega})$$

由于$(\vec{V}\times\vec{\Omega})\perp\vec{V}$，而$\vec{s}\parallel\vec{V}$，即$(\vec{V}\times\vec{\Omega})\perp\vec{s}$，故等号右边的数量积$\vec{s}\cdot(\vec{V}\times\vec{\Omega})=0$.

另外，根据梯度定义：$\vec{s}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial s}$是沿流线方向的方向导数，于是有

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0$$

沿流线 s 积分后可得

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi=C(n) \tag{5}$$

式(5)称为沿流线的 *Bernoulli* 积分，$C(n)$是同一流线上的积分常数，不同流线上的积分常数 $C(n)$不同. 它可由流线起始点上的参数给出，若流场的起始面上流动均匀(即均匀流断面)，该面上的 *Bernoulli* 常数处处相等，整个流场有 $C(n)=const$. 在重力场中，$\Pi=zg$，代入式(5)中，经整理后得 *Bernoulli* 能量方程为

$$z+\frac{p}{\gamma}=\frac{V^2}{2g}=\text{流线常数}$$

2.2.2 沿涡线积分

将方程(4)在涡线的切线方向$\vec{l}$上投影，得

$$\vec{l}\cdot\nabla\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=\vec{l}\cdot(\vec{V}\times\vec{\Omega})$$

由于$(\vec{V}\times\vec{\Omega})\perp\vec{\Omega}$，而$\vec{l}\parallel\vec{\Omega}$，即$(\vec{V}\times\vec{\Omega})\perp\vec{l}$，故等号右边的数量积$\vec{l}\cdot(\vec{V}\times\vec{\Omega})=0$，

另外，根据梯度定义：$\vec{l}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial l}$是沿涡线方向的方向导数，于是有

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0$$

沿涡线 l 积分后可得

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi=C(m) \tag{6}$$

式(6)称为涡线的 Bernoulli 积分，$C(m)$是同一涡线上的积分常数，不同涡线上的积分常数 $C(m)$不同，在同一涡线上 $C(m)$值不变. 在重力场中，$\Pi=zg$，代入式(6)中得 Bernoulli 能量方程为：

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=\text{涡线常数}$$

2.3 Euler 积分[5]

在无旋流场中，$\vec{\Omega}=0$，故式(4)可直接简化为

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0 \tag{7}$$

也可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由式(8)可明显看出$\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)$与空间点坐标 x、y、z 无关，将(7)式沿整个无旋流场空间积分得

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi=C \tag{9}$$

式(9)称为 *Euler* 积分，积分常数 C 值在整个无旋流场相同. 在重力场中，$\Pi=zg$，代入式(9)中得 Bernoulli 能量方程为

$$Z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=\text{流场常数}$$

3 Bernoulli 积分和 Euler 积分的物理意义

从式(5)、(6)、(9)可见，Bernoulli 积分和 Euler 积分具有相同的形式，但积分条件不同，各积分常数具有不同的物理意义. Bernoulli 积分常数可称为流线常数或涡线常数，而 Euler 积分常数可称为流场常数.

在重力场中，将$\Pi=zg$ 分别代入式(5)、(6)、(9)中，经简化整理后均可得到一般形式的不可压缩理想流体定常流动的 Bernoulli 能量方程 $Z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=$常数，在形式上完全相同，式(5)、(6)、(9)都称为 Bernoulli 方程. 但对于不可压缩理想流体定常无旋流动，整个流场中单位重量流体的总机械能处处相等，而对于有旋流动，则沿同一条流线或涡线的总机械能守恒.

4 结束语

鉴于有旋流场的 Bernoulli 方程沿流线或涡线守恒，在应用总流 Bernoulli 能量方程时，计算断面必须选取在均匀流段上，因为均匀流断面上的 Bernoulli

中国知网 https://www.cnki.net

积分常数 $C(n)$处处相等,且 $z+\frac{p}{\gamma}=$常数,符合静压分布规律[6].对于无旋流场,积分常数 C 全流场处处相等,Bernoulli 能量方程全流场守恒.应用时应注意区别对待.

参考文献:

[1] 张远君.流体力学大全[M].北京:北京航空航天大学出版社,1991.

[2] 费祥麟.高等流体力学[M].西安:西安交通大学出版社,1989.

[3] 叶敬棠,柳兆荣,许世雄,吴正.流体力学[M].上海:复旦大学出版社,1989.

[4] 张兆顺,崔桂香.流体力学[M].北京:清华大学出版社,1999.

[5] 孙文策.工程流体力学[M].大连:大连理工大学出版社,1995.

[6] 屠大燕.流体力学与流体机械[M].北京:中国建筑工业出版社,1994.

Discussion on Conservation of Bernoulli Equation in the Fluid Field of Rotation and No Rotation

TANG Chao-chun, PAN Yang, JIANG Li-wen

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Based on kinetic differential equation of Euler, kinetic differential equation of Lamb is analyzed, physical meaning of Bernoulli integral and Euler integral are discussed and conservation of energy equation of Bernoulli in the fluid field of rotation and no rotation is expounded in this paper.

Key words: Bernoulli equation; conservation; fluid field of rotation; fluid field of no rotation; streamline; eddy line

(上接第 10 页)

Research on the Distinction between Comfortable Air Conditioned System and Purification Air Conditioned System

ZHOU Xiang-yang, LI Jian-qiang, XIONG Guo-hua

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong Univ., Nangchang 330013, China)

Abstract: This paper reveals the connection and distinction between comfortable air conditioned system and purification air conditioned system and gives an detailed description to various aspects, such as the systematic form, the air treating circuit and wind volume control, etc.

Key words: purification; air circuit; air volume control

中国知网 https://www.cnki.net