第19卷第3期 华东交通大学学报 Vol.19 No.3
2002年9月 Journal of East China Jiaotong University Sep. 2002

文章编号:1005-0523(2002)03-0089-06

一类几何不等式的两个结果与若干猜想

刘 健

(华东交通大学 土木建筑学院 江西 南昌 330013)

摘要:建立了两个新的有关三角形内部任意一点的三元二次型几何不等式,提出了这类不等式的若干猜想.

关 键 词:三角形;不等式;点;实数

中图分类号:O.178. **文献标识码**:A

1 引言与主要结果

设△ABC内部任意一点P到三顶点A,B,C与三边BC,CA,AB的距离分别为R_1,R_2,R_3,r_1,r_2,r_3,则对任意实数x,y,z有

$$\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}\geqslant 2\left(\frac{yz}{R_1}+\frac{zx}{R_2}+\frac{xy}{R_3}\right), \tag{1}$$

这是一个已知的几何不等式,见专著[1].从已有的参考文献来看,这类涉及三角形内部一点的三元二次动点型不等式还不太多见.

应用不等式(1)很容易推证以下不等式:

$$\frac{r_a}{r_1}x^2+\frac{r_b}{r_2}y^2+\frac{r_c}{r_3}z^2\geqslant 2\left(yz\frac{w_a}{R_1}+zx\frac{w_b}{R_2}+xy\frac{w_c}{R_3}\right), \tag{2}$$

其中r_a,r_b,r_c与w_a,w_b,w_c分别为△ABC的相应边上的旁切圆半径与内角平分线.事实上,在不等式(1)中作置换:$x\to x\sqrt{r_a}$,$y\to y\sqrt{r_b}$,$z\to z\sqrt{r_c}$,然后利用简单的半对称不等式$\sqrt{r_br_c}\geqslant w_a$等,即易知不等式(2)对正数$x$,$y$,$z$继而对任意实数$x$,$y$,$z$成立.

在不等式(2)的启发下,我们发现并证明了类似于(2)的下述两个结果:

定理1 设△ABC相应边上的高线为h_a,h_b,h_c,其余符号同上,则

$$\left(\frac{h_b+h_c}{r_1}\right)^2x^2+\left(\frac{h_c+h_a}{r_2}\right)^2y^2+\left(\frac{h_a+h_b}{r_3}\right)^2z^2\geqslant 16\left[yz\left(\frac{h_a}{R_1}\right)^2+zx\left(\frac{h_b}{R_2}\right)^2+xy\left(\frac{h_c}{R_3}\right)^2\right], \tag{3}$$

等号当且仅当$x=y=z$,△ABC为正三角形且P为其中心时成立.

定理2 各符号意义同上,则

$$\left(\frac{h_a+r_a}{r_1}\right)^2x^2+\left(\frac{h_b+r_b}{r_2}\right)^2y^2+\left(\frac{h_c+r_c}{r_3}\right)^2z^2\geqslant 16\left[yz\left(\frac{w_a}{R_1}\right)^2+zx\left(\frac{w_b}{R_2}\right)^2+xy\left(\frac{w_c}{R_3}\right)^2\right], \tag{4}$$

等号当且仅当$x=y=z$,△ABC为正三角形且P为其中心时成立.

不等式(3)与不等式(4)在形式上类似而优美.我们后面将看到有趣的另一点是,不等式(3)与不等式(4)

收稿日期:2001-12-20

作者简介:刘健(1963-),男,江西兴国人,助理研究员.

的证明几乎可以互相转换.

2 定理的证明与推论

引理1 设正数 p_1,p_2,p_3 与实数 q_1,q_2,q_3 满足：$4p_2p_3>q_1^2, 4p_3p_1>q_2^2, 4p_1p_2>q_3^2$ 及

$$p_1q_1^2+p_2q_2^2+p_3q_3^2+q_1q_2q_3\leqslant 4p_1p_2p_3. \tag{5}$$

则对任意实数 x,y,z 有

$$p_1x^2+p_2y^2+p_3z^2\geqslant q_1yz+q_2zx+q_3xy. \tag{6}$$

证明 不等式(6)即 $p_1x^2-(zq_2+yq_3)x+p_2y^2-yzq_1+p_3z^2\geqslant 0.$ (7)

由于 $p_2>0, p_3>0, 4p_2p_3>q_1^2$，所以有 $p_2y^2-q_1yz+p_3z^2>0$. 可见(7)左端关于 x 的二次三项式的常数项与二次项的系数均大于零. 因此，欲证(7)式成立只要证其左端关于 x 的判别式不大于零即可，即要证：

$$[-(zq_2+yq_3)]^2-4p_1(p_2y^2-yzq_1+p_3z^2)\leqslant 0,$$

也即

$$(4p_1p_2-q_3^2)y^2-(4p_1q_1-2q_1q_2)yz+(4p_3p_1-q_2^2)z^2\geqslant 0.$$

注意到 $4p_1p_2-q_3^2>0, 4p_3p_1-q_2^2>0$，可见要证上式只需证：

$[-(4p_1q_1-2q_1q_2)]^2\leqslant 4(4p_1p_2-q_3^2)(4p_3p_1-q_2^2)$，展开整理即

$p_1^2(p_1q_1^2+p_2q_2^2+p_3q_3^2+q_1q_2q_3-4p_1p_2p_3)\leqslant 0.$

由已知条件等式(5)式知上式成立，从而不等式(7)，(6)获证. 引理1证毕.

引理2 设△ABC的边BC，CA，AB与半周长分别为a，b，c，s，其内切圆半径与外接圆半径分别为r，R. 另以$\sum$表示循环和，则

(Ⅰ) $$\sum(b+c)(s-b)(s-c)=\sum(s-a)a^2=4rs(R+r), \tag{8}$$

(Ⅱ) $$\sum(s-a)(c+a)(a+b)=s(s^2+8Rr+5r^2), \tag{9}$$

(Ⅲ) $$\sum(b+c)^2(s-b)^2(s-c)^2=2r^2s^2(8R^2+8Rr+3r^2-s^2). \tag{10}$$

证 (Ⅰ) 注意到 $2s=a+b+c$ 可知

$$\begin{aligned}&4\sum(b+c)(s-b)(s-c)\\&=\sum(b+c)[a^2-(b-c)^2]\\&=\sum(2s-a)a^2-\sum(b+c)(b-c)^2\\&=2s\sum a^2-\sum a^3-2s\sum(b-c)^2+\sum a(b-c)^2\\&=2s\sum a^2-\sum a^3-4s(\sum a^2-\sum bc)+\sum a(b^2+c^2)-6abc\\&=4s\sum bc-2\sum a^3-6abc.\end{aligned}$$

再以已知的恒等式：

$$abc=4Rrs, \tag{11}$$

$$\sum a^3=2s(s^2-6Rr-3r^2), \tag{12}$$

$$\sum bc=s^2+4Rr+r^2, \tag{13}$$

代入即易得

$$\sum(b+c)(s-b)(s-c)=4rs(R+r). \tag{14}$$

利用式(12)及已知恒等式：$\sum a^2=2(s^2-4Rr-r^2)$，

易得

$$\sum(s-a)a^2=4rs(R+r). \tag{15}$$

所以(8)式成立.

(Ⅱ) 将等式(13)与(15)代入显然的恒等式：

$$\sum(s-a)(c+a)(a+b)=\sum(s-a)a^2+s\sum bc$$

即易得(9)式.

(Ⅲ) 注意到

$$\begin{aligned}&\sum(b+c)^2(s-b)^2(s-c)^2\\&=[\sum(b+c)(s-b)(s-c)]^2-2(s-a)(s-b)(s-c)\sum(s-a)(c+a)(a+b),\end{aligned}$$

以(8)，(9)两式以及已知的恒等式：$(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$　　(16)

代入计算后即得(10).

引理3　符号同上，则对△ABC 内部任意一点P有

$\sin\frac{A}{2}\geqslant\frac{\sqrt{r_2r_3}}{R_1}$，　$\sin\frac{B}{2}\geqslant\frac{\sqrt{r_3r_1}}{R_2}$，　$\sin\frac{C}{2}\geqslant\frac{\sqrt{r_1r_2}}{R_3}$.　　这一引理所述不等式是很容易证明的，它在推证有关 r_1,r_2,r_3,R_1,R_2,R_3 的不等式时经常用到，如见文献[2]，[3].

下面，我们分别证明定理1与定理2.

定理1的证明　为证不等式(3)，首先证明有关高线的二次型不等式：

$$(h_b+h_c)^2x^2+(h_c+h_a)^2y^2+(h_a+h_b)^2z^2\geqslant16\left(yzh_a^2\sin^2\frac{A}{2}+zxh_b^2\sin^2\frac{B}{2}+xyh_c^2\sin^2\frac{C}{2}\right).\tag{17}$$

为此，又先证严格不等式：$4(h_c+h_a)^2(h_a+h_b)^2>16^2\left(h_a\sin\frac{A}{2}\right)^4$.　　(18)

即　$(h_c+h_a)(h_a+h_b)>8\left(h_a\sin\frac{A}{2}\right)^2$. 由 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$，$h_a=\frac{2\triangle}{a}$(△为△ABC 的面积)等容易知道上式可化为　$(c+a)(a+b)>8(s-b)(s-c)$.　　(19)

但　$(c+a)(a+b)-8(s-b)(s-c)=bc+a(b+c-a)+2(b-c)^2>0$，于是知(19)，(18)成立.

根据引理1与不等式(18)以及与之相应的另两式可知，欲证不等式(17)只需证：

$$\sum(h_b+h_c)^2\left(4h_a\sin\frac{A}{2}\right)^4+\left(64h_ah_bh_c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant4(h_b+h_c)^2(h_c+h_a)^2(h_a+h_b)^2.$$

利用高线公式以及三角形中常见的恒等式：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R},\tag{20}$$

知前式即 $\sum4\triangle^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2b^2c^2\cdot\left(\frac{8\triangle}{a}\sin\frac{A}{2}\right)^4+\left(64\cdot\frac{8\triangle^3}{abc}\cdot\frac{r}{4R}\right)^2\leqslant\frac{256(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2\triangle^6}{(abc)^4}$，

两边乘以 $\frac{(abc)^4}{256\triangle^6}$，可知上式等价于

$$64\sum(b+c)^2b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}+64(abc)^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\leqslant(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

再利用半角公式及恒等式：　$\frac{r}{R}=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$，　　(21)

可知前式等价于有关边长的不等式：

$$64\sum(b+c)^2(s-b)^2(s-c)^2+1024(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2\leqslant(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.\tag{22}$$

在上式两边除以 $16s^2$，同时利用引理1的恒等式(10)与前面的恒等式(16)以及已知的恒等式：

$$(b+c)(c+a)(a+b)=2s(s^2+2Rr+r^2),\tag{23}$$

又知(22)式等价于　$32r^2(8R^2+8Rr+3r^2-s^2)+256r^4\leqslant(s^2+2Rr+r^2)^2$，

展开整理即　$s^4+(4Rr+34r^2)s^2-(252R^2+252Rr+351r^2)r^2\geqslant0$，

也即　$(s^2-16Rr+5r^2)(s^2+20Rr+29r^2)+4(17R+62r)(R-2r)r^2\geqslant0$.

根据著名的 Gerretsen 不等式 $s^2\geqslant16Rr-5r^2$(参见[1]，[4])与 Euler 不等式 $R\geqslant2r$，即知上式成立. 从而不等式(22)，(17)获证.

现在，根据不等式(17)与引理3可知，对任意正数 x，y，z 与△ABC 内部任一点 P 有

$$(h_b+h_c)^2x^2+(h_c+h_a)^2y^2+(h_a+h_b)^2z^2\geqslant16\left(yzh_a^2\cdot\frac{r_2r_3}{R_1^2}+zxh_b^2\cdot\frac{r_3r_1}{R_2^2}+xyh_c^2\cdot\frac{r_1r_2}{R_3^2}\right),\tag{24}$$

由于上式中的二次项系数均为正值，所以易知上式事实上对任意实数 x,y,z 都成立.

在不等式(24)中作置换：$x\to\frac{x}{r_1}$，$y\to\frac{y}{r_2}$，$z\to\frac{z}{r_3}$，立即得到定理1所述不等式(3). 容易确定(3)中等号成立

的条件(详略)．定理 1 证毕．

接着，我们给出定理 2 的证明．

定理 2 的证明：首先来证以下二次型不等式：

$$(h_a+r_a)^2x^2+(h_b+r_b)^2y^2+(h_c+r_c)^2z^2\geqslant 16\left(\mathrm{yzw}_{\mathrm{a}}^2\sin^2\frac{A}{2}+zxw_b^2\sin^2\frac{B}{2}+xyw_c^2\sin^2\frac{C}{2}\right). \tag{25}$$

为此又首证严格不等式：

$$4(h_b+r_b)^2(h_c+rc)^2>16^2\left(w_a\sin\frac{A}{2}\right)^4, \tag{26}$$

即

$$(r_b+h_b)(r_c+h_c)>8\left(w_a\sin\frac{A}{2}\right)^2. \tag{27}$$

由于 $w_a\sin\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{2\triangle}{b+c}$, $h_b+r_b=\frac{\triangle(\mathrm{c}+a)}{b(s-b)}$, $h_c+r_c=\frac{\triangle(\mathrm{a}+b)}{c(s-c)}$，于是易知(27)式可等价地化为 $(c+a)(a+b)(b+c)^2>32bc(s-b)(s-c)$．因 $(b+c)^2\geqslant 4bc$，故要证上式只要证前面已证的不等式(19)．从而(27)，(26)得证．

根据引理 1 与不等式(26)以及与之相应的另两式可知，欲证(25)只要证：$\sum(h_a+r_a)^2\left(4w_a\sin\frac{A}{2}\right)^4+\left(64w_aw_bw_c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant 4(h_a+r_a)^2(h_b+r_b)^2(h_c+r_c)^2$．

再利用 $h_a+r_a=\frac{\triangle(\mathrm{b}+c)}{a(s-a)}$, $w_a\sin\frac{A}{2}=\frac{2\triangle}{b+c}$与恒等式(20)以及易证的恒等式：

$$w_aw_bw_c=\frac{32sR\triangle^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \tag{28}$$

可知前式等价于

$$16^2\sum\left[\frac{\triangle(\mathrm{b}+c)}{a(s-a)}\right]^2\cdot\left(\frac{2\triangle}{b+c}\right)^4+16^3\cdot\frac{(32sR\triangle^2)^2}{[(b+c)(c+a)(a+b)]^2}\cdot\left(\frac{r}{4R}\right)^2\leqslant\frac{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2\triangle^6}{(abc)^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2},$$

两边乘以$\frac{(abc)^2}{\triangle^6}$并应用 $rs=\triangle$，即知上式等价于

$$16^3\sum\frac{b^2c^2}{(s-a)^2(b+c)^2}+\frac{16^2\cdot 32^2(abc)^2}{[(\mathrm{b}+c)(c+a)(a+b)]^2}\leqslant\frac{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}. \tag{29}$$

注意到简单的不等式 $bc\leqslant\frac{1}{4}(b+c)^2$, $abc\leqslant\frac{1}{8}(b+c)(c+a)(a+b)$可知，欲证上式只要证：

$$\frac{16^3}{4^2}\sum\frac{(b+c)^2}{(s-a)^2}+\frac{16^2\cdot 32^2}{8^2}\leqslant\frac{4(b+c)^2(c+a)(a+b)^2}{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2},$$

两边乘以$\frac{1}{4}(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2$，即知上式化为定理 1 证明中已证的不等式(22)．因此不等式(29)，(25)得证．

由不等式(25)与引理 3 的不等式立即可得定理 2 的不等式(4)(仿前)，且易知(4)中等号成立的条件如定理 2 中所述．定理 2 证毕．

由定理 1 可以得到两个较有趣的推论．

在不等式(3)中令 P 为△ABC 的类似重心，则有 $\mathrm{r}_1=\frac{2a\triangle}{a^2+b^2+c^2}$, $R_1=\frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2}$($m_a$, m_b, m_c 为△ABC 相应边上的中线)等，从而有

$\left(\frac{h_b+h_c}{a\triangle}\right)^2x^2+\left(\frac{h_c+h_a}{b\triangle}\right)^2y^2+\left(\frac{h_a+h_b}{c\triangle}\right)^2z^2\geqslant 16\left[yz\left(\frac{h_a}{bcm_a}\right)^2+zx\left(\frac{h_b}{cam_b}\right)^2+xy\left(\frac{h_c}{abm_c}\right)^2\right]$．由此进而容易知道，这一不等式等价于下述有关高线与中线的三元二次型不等式：

推论 1.1　对△ABC 与任意实数 x，y，z 有

$$\frac{x^2}{(h_b+h_c)^2}+\frac{y^2}{(h_c+h_a)^2}+\frac{z^2}{(h_a+h_b)^2}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{yz}{m_a^2}+\frac{zx}{m_b^2}+\frac{xy}{m_c^2}\right). \tag{30}$$

注 1：本文中未作说明的三角形指任意三角形.

令△ABC 为锐角三角形且 P 为其外心，则 $r_1 = R\cos A$，$r_2 = R\cos B$，$r_3 = R\cos C$，$R_1 = R_2 = R_3 = R$，由定理 1 的不等式(3)得

$$\left(\frac{h_b + h_c}{\cos A}\right)^2 x^2 + \left(\frac{h_c + h_a}{\cos B}\right)^2 y^2 + \left(\frac{h_a + h_b}{\cos A}\right)^2 z^2 \geqslant 16(yzh_a^2 + zxh_b^2 + xyh_c^2), \tag{31}$$

于上式作置换：$x \to \frac{x}{\sin^2 A}$，$y \to \frac{y}{\sin^2 B}$，$z \to \frac{z}{\sin^2 C}$，并注意到 $h_a = 2R\sin B\sin C$ 等，可得下述二次型三角不等式：

推论 1.2　对锐角△ABC 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin 2A}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\sin C + \sin A}{\sin 2B}\right)^2 y^2 + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin 2C}\right)^2 z^2 \geqslant 4(yz + zx + xy). \tag{32}$$

3　若干猜想

首先，针对本文的定理 1 与定理 2 的不等式来提出两个猜想.

猜想 1　设 $0 < k \leqslant \frac{12}{5}$，其余符号同前，则对△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{h_b + h_c}{r_1}\right)^k x^2 + \left(\frac{h_c + h_a}{r_2}\right)^k y^2 + \left(\frac{h_a + h_b}{r_3}\right)^k z^2 \geqslant 4^k\left[yz\left(\frac{h_a}{R_1}\right)^k + zx\left(\frac{h_b}{R_2}\right)^k + xy\left(\frac{h_c}{R_3}\right)^k\right]. \tag{33}$$

猜想 2　设 $0 < k \leqslant \frac{12}{5}$，其余符号同前，则对△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{h_a + r_a}{r_1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{h_b + r_b}{r_2}\right)^2 y^2 + \left(\frac{h_c + r_c}{r_3}\right)^2 z^2 \geqslant 16\left[yz\left(\frac{w_a}{R_1}\right)^2 + zx\left(\frac{w_b}{R_2}\right)^2 + xy\left(\frac{w_c}{R_3}\right)^2\right]. \tag{34}$$

注 2：　本文作者曾发现并证明了有关三元二次型不等式重要的二次“降幂定理”(参见[2])：设 p_1，p_2，p_3，q_1，q_2，q_3 与 k 均为正数，且对任意实数 x，y，z 成立不等式：

$$x^2 p_1^k + y^2 p_2^k + z^2 p_3^k \geqslant yzq_1^k + zxq_2^k + xyq_3^k, \tag{35}$$

则当 $0 < m < k$ 时，成立不等式：

$$x^2 p_1^m + y^2 p_2^m + z^2 p_3^m \geqslant yzq_1^m + zxq_2^m + xyq_3^m. \tag{36}$$

由上述降幂定理知，欲证不等式(33)、(34)成立，只要分别证明 $k = \frac{12}{5}$ 的情形即可. 事实上，有了定理 1 与定理 2 的不等式，按降幂定理还提出更困难的问题：分别求使(33)，(34)成立的最大 k 值.(已经知道两个最大指数均接近$\frac{12}{5}$).对于以下诸猜想的三元二次型不等式，我们都可提出求最大指数的问题.

对锐角三角形，从指数上来考察定理 1 的不等式(3)，我们提出以下

猜想 3　符号同上，则对锐角△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{h_b + h_c}{r_1}\right)^3 x^2 + \left(\frac{h_c + h_a}{r_2}\right)^3 y^2 + \left(\frac{h_a + h_b}{r_3}\right)^3 z^2 \geqslant 16\left[yz\left(\frac{h_a}{R_1}\right)^3 + zx\left(\frac{h_b}{R_2}\right)^3 + xy\left(\frac{h_c}{R_3}\right)^2\right] \tag{37}$$

将定理 1 中的高线换成内角平分线后，不等式很有可能还成立，为此提出

猜想 4　符号同上，则对△内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{w_b + w_c}{r_1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{w_c + w_a}{r_2}\right)^2 y^2 + \left(\frac{w_a + w_b}{r_3}\right)^2 z^2 \geqslant 16\left[yz\left(\frac{w_a}{R_1}\right)^2 + zx\left(\frac{w_b}{R_2}\right)^2 + xy\left(\frac{w_c}{R_3}\right)^2\right] \tag{38}$$

对于锐角三角形，类似于上的一个猜想是

猜想 5　对锐角△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{m_b + m_c}{r_1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{m_c + m_a}{r_2}\right)^2 y^2 + \left(\frac{m_a + m_b}{r_3}\right)^2 z^2 \geqslant 16\left[yz\left(\frac{m_a}{R_1}\right)^2 + zx\left(\frac{m_b}{R_2}\right)^2 + xy\left(\frac{m_c}{R_3}\right)^2\right] \tag{39}$$

另一个类似于定理 2 的不等式猜想如下：

猜想 6　符号同前，则对锐角△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x，y，z 有

$$\left(\frac{m_a+r_a}{r_1}\right)^2x^2+\left(\frac{m_b+r_b}{r_2}\right)^2y^2+\left(\frac{m_c+r_c}{r_3}\right)^2z^2\geqslant16\left[yz\left(\frac{m_a}{R_1}\right)^2+zx\left(\frac{m_b}{R_2}\right)^2+xy\left(\frac{m_c}{R_3}\right)^2\right].\tag{40}$$

最后,我们给出两个与以上几个猜想稍有不同的三元二次动点型不等式猜想来结束本文.

猜想 7 设 P 为△ABC 内部任一点,△ BPC,△ CPA,△ APB 的外接圆半径分别为 R_a, R_b, R_c,其余符号同前,则对任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{\sqrt{r_2+r_3}}+\frac{y^2}{\sqrt{r_3+r_1}}+\frac{z^2}{\sqrt{r_1+r_2}}\geqslant\frac{yz}{\sqrt{R_a}}+\frac{zx}{\sqrt{R_b}}+\frac{xy}{\sqrt{R_c}}.\tag{41}$$

猜想 8 符号同前,则对△ABC 内部任一点 P 与任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}\geqslant4\left(\frac{yz}{R_2+R_3}+\frac{zx}{R_3+R_1}+\frac{xy}{R_1+R_2}\right).\tag{42}$$

这一猜想与本文开关提到的不等式(1)非常类似。

参考文献

[1] D·S·Mitrinović, J·E·Pečarić and V·Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[2] 刘 健. 一个三元二次型几何不等式的应用与推广[C]. 不等式研究,杨学枝主编. 西藏:西藏人民出版社,2000 年.

[3] 刘 健. Carlitz－Klamkin 不等式的指数推广及其应用[J]. 铁道师院学报,1998,16(4),73～79.

[4] O·Bottema 等,单 尊 译. 几何不等式[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

Two Results and Several Conjectures of a Kind of Geometry Inequality

LIU Jian

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013 China)

Abstract: The two new inequalities of quadratic form of the three variables are set up. Concerning a free point of the interior of triangle, several conjectures of inequality are put forward.

Key words: triangle; inequality; point; real numbers