

文章编号: 1005-0523(2002)03-0095-03

# 对逻辑斯蒂方程的考察

黄漫<sup>1</sup>, 蔡彪<sup>2</sup>

(华东交通大学 1. 土木建筑学院; 2. 基础科学学院 江西 南昌 330013)

**摘要:** 使用 Visual Basic 语言, 通过计算机对逻辑斯蒂方程进行考察, 清楚的展示了它们的自相似分形结构, 以及混沌区内出现的密集线和窗口内的有限周期.

**关键词:** 逻辑斯蒂方程; 分形; 混沌;

**中图分类号:** O415.5

**文献标识码:** A

## 0 引言

经典理论描述确定性运动和随机性运动.

单摆复摆的振动, 在振幅不大时, 只要初始条件给定, 系统在任何时刻的位置和速度均是确定的; 且初始条件微小改变, 只会使运动状态产生微小改变. 我们说这种运动具有确定性. 布朗运动具有随机性, 可借助于概率论方法, 研究其统计规律. 但当系统具有非线性因素时, 其运动不再具有确定性, 也不具有上述的随机性. 系统在未来的状态, 对于初始条件的微小变化极为敏感. 这叫做混沌现象<sup>[1]</sup>. 混沌一词最早是李天岩博士等提出来的<sup>[2]</sup>.

生物学家梅提出的反映昆虫世代繁殖情况的模型<sup>[3]</sup>, 是一个非线性迭代方程, 后来人们称之为逻辑斯蒂方程:

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n \times (1 - X_n), \quad X_n \in [0, 1] \quad (1)$$

这是表现混沌形成过程的最简单最典型的例子之一. 它是描述生物种群的数量随繁殖代数而变化的迭代方程. 种群数量的相对值  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, n+1$ ) 用  $0-1$  表示. “0”表示种群灭绝, “1”表示种群数量极盛(将导致食物枯竭或环境的迅速恶化, 意味着种群即将因此而走上灭绝). 参数  $\lambda$  表示种群个体之间的竞争强度和环境优劣程度<sup>[4]</sup>.

设  $\xi = X_n | n \rightarrow \infty$ , 以  $\lambda$  作为控制参量, 人们已经通过计算机模拟<sup>[5]</sup>描述了  $\xi-\lambda$  关系:

A. 当  $3 > \lambda > 1$  时, 迭代的结果是一个确定值 ( $\xi$  和  $\lambda$  单值对应), 且与初始值  $X_1$  无关.

B. 当  $3.569 > \lambda > 3$  时, 开始是一个  $\lambda$  值对应 2 个  $\xi$  值, 即  $\xi-\lambda$  出现二分岔(或称周期 2), 随着  $\lambda$  的增加, 又出现两个二分岔(周期 4), 四个二分岔(周期 8)、……

C. 直到  $4 > \lambda > 3.569$  时, 周期将变为  $\infty$ , 即进入混沌区. 这时, 初始值  $X_1$  的微小变化将得到  $\xi$  值的貌似随机变化, 这是混沌的特征之一.

我们用 Visual Basic 语言工具, 在他人已做工作的基础上, 进行了考察, 并发现了一些新的现象.

## 1 分岔-混沌图的分形结构

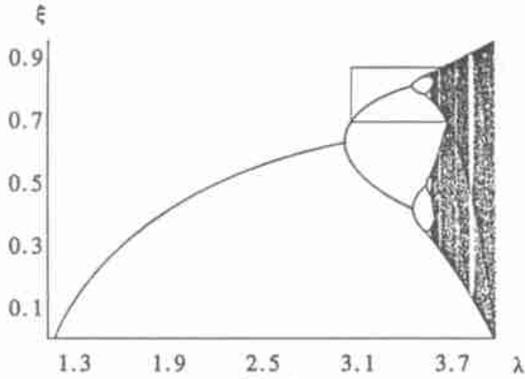
给出一个  $\lambda$  值, 以  $n$  为内循环变量, 迭代足够多次,  $X_n$  的值将达到稳定(即  $X_n = X_\infty = \xi$ ). 让  $\lambda$  成为外循环变量(步长微小), 将计算结果画成  $\xi-\lambda$  的对应关系: 确定值  $\rightarrow$  分岔  $\rightarrow$  混沌(图(1)). 图中  $\lambda$  取值从 1 至 4 之间. 此图中有一个小矩形范围 ( $\lambda: 3.04-3.68, \xi: 0.73-0.91$ ), 图(2)是这个范围的放大图象. 在图(2)中又取一小矩形框范围 ( $\lambda: 3.480-3.592, \xi: 0.869-0.898$ ), 这个范围的放大图

收稿日期: 2001-09-30

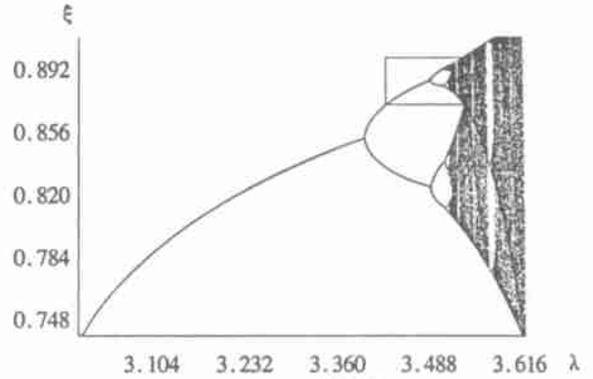
作者简介: 黄漫(1982-), 男, 湖南隆回人, 华东交通大学土木建筑学院本科 98 级学生.

象,和图(1)、图(2)极其相似.再在图(1)中取一个混沌窗口之间的很小范围( $\lambda$ :3.7410-3.7434,  $\xi$ :0.495-0.510),图(3)是这个范围的放大图象(当然这

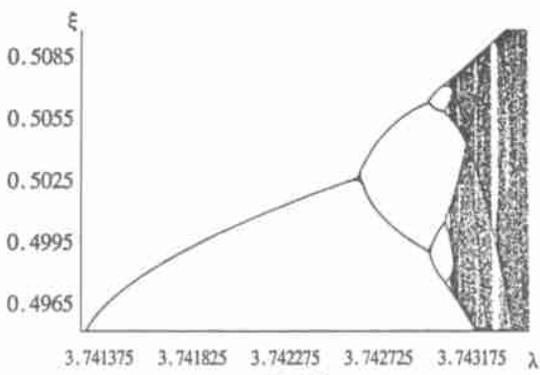
种范围还可以无穷尽的细分下去).可以清楚的看到,这是一种具有自相似的分形结构.我们可以给它取名为“逻辑斯蒂分形”.



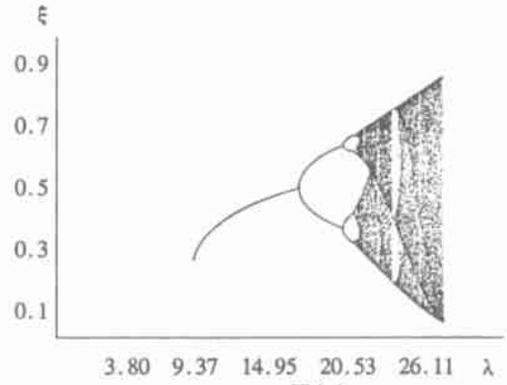
图(1)



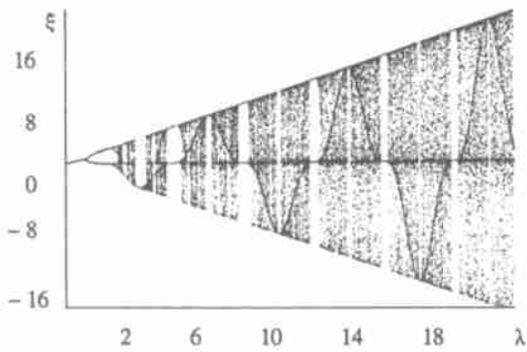
图(2)



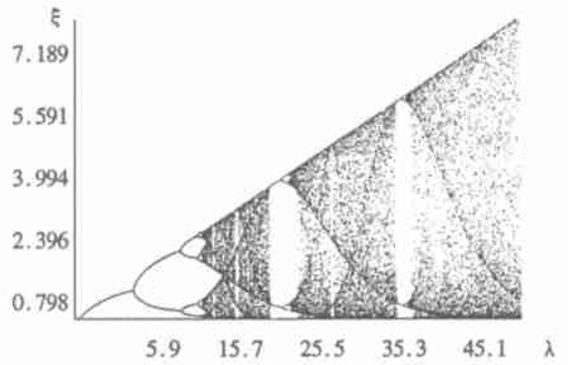
图(3)



图(4)



图(5)



图(6)

## 2 类逻辑斯蒂方程

我们又考察了另外一些迭代方程:

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n \times (1 - X_n^T) \quad (2)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n \times (1 - X_n) T \quad (3)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n T_1 \times (1 - X_n) T_2 \quad (4)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times \text{Cos}^{T_1}(X_n T_2) \quad (5)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n \times M - X_n \quad (6)$$

等等.以上各式中,  $T, T_1, T_2$  为任意设定的正整数,  $M$  为大于 1 的任意实数, 这些方程具有类似逻辑斯蒂方程的性质. 当我们把上述方程中的  $T, T_1, T_2, M$  取为某个确定值时, 就能定出控制参量  $\lambda$  的取值域, 如下列方程:

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n^2 \times (1 - X_n)^3 \quad (7)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times \text{Cos}^3 X_n \quad (8)$$

$$X_{n+1} = \lambda \times X_n \times 10^{X_n} \quad (9)$$

它们的  $\lambda$  取值范围已在图中标出, 其中式(7)对应

图(4),式(8)对应图(5),式(9)对应图(6).以上各方方程的图,也和逻辑斯蒂方程一样具有自相似的分形结构,我们称之为“类逻辑斯蒂方程”和“类逻辑斯蒂分形”.

### 3 混沌区内的密集线

如果仔细观察以上分岔一混沌图,会发现不同方程的图中有不同形状的密集线.  $\xi-\lambda$  点的相对密集,可以理解为混沌的“貌似随机”,在密集线附近  $\xi$  具有取值(概率)优势.

密集线的存在,表明混沌的貌似随机(内在随机性)的概率密度(同一个  $\lambda$  值,  $\xi$  取值的概率密度)具有非均匀性:密集线应是概率密度出现极大值的地方,混沌窗口概率密度为 0. 在方程(8)对应的图

(5)中,与其他图不大相同,其周期性的出现混沌窗口,这可能与余弦函数本身的周期性有关.由此看来,内在随机性(混沌)的统计规律应该不同于外在随机性(确定性系统)的统计规律.

### 4 混沌区内窗口的考察

我们对逻辑斯蒂方程得到的混沌区窗口<sup>[4]</sup>,进行了数值计算,发现某些  $\lambda$  值对应了三个  $\xi$  值(即周期 3). 另外还有周期 4, 周期 5, 周期 6, 周期 7 等各种周期出现. 例如当  $\lambda=3.84$  时,  $\xi$  值在 0.9594474, 0.1494069, 0.4880044 三个值之间周期变化. 其他周期举例列表于下:

混沌区窗口的 $\lambda$ 值	$\xi$ 值的周期变化	
3.9605	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} 0.9901132 \rightarrow 0.4982714 \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} 0.1475943 \leftarrow 0.0387698 \xrightarrow{\quad} \end{array}$	周期 4 $X_{n+4} = X_n$
3.74	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} 0.9349453 \rightarrow 0.2274764 \rightarrow 0.6572335 \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} 0.4961765 \leftarrow 0.84253838 \xrightarrow{\quad} \end{array}$	周期 5 $X_{n+5} = X_n$
3.63	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} 0.9073716 \rightarrow 0.3050956 \rightarrow 0.7696046 \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} 0.5059476 \leftarrow 0.8325966 \leftarrow 0.64364738 \xrightarrow{\quad} \end{array}$	周期 6 $X_{n+6} = X_n$
3.702	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} 0.9254874 \rightarrow 0.2552980 \rightarrow 0.7038364 \rightarrow 0.7717147 \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} 0.4981524 \leftarrow 0.8397601 \leftarrow 0.6521856 \xrightarrow{\quad} \end{array}$	周期 7 $X_{n+7} = X_n$

计算表明,  $3 > \lambda > 1$  时,  $\xi$  为确定值; 当  $\lambda > 3$  时,  $\xi$  值出现倍周期分岔, 即周期 2, 周期 4, 周期 8, 周期 16 等等; 当  $4 > \lambda > 3.569$  时, 进入混沌区, 即  $\xi$  有无限周期解. 但在混沌区内, 仍会出现非无限周期甚至非倍周期解, 例如周期 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..... 这是混沌的特征之一. 这些非倍增周期解, 出现在混沌窗口中, 事实上每个窗口中的一个  $\lambda$  值都对应  $\xi$  的一种有限周期的变化. 而窗口外, 才是真正的混沌.

### 参考文献:

[1] 郝伯林. 物理学进展. [J]. 1983, (3): 335.  
 [2] T Li, J York, Am Math Monthly [J]. 1975, (82): 985.  
 [3] R May, Nature [J]. 1976, (261): 459.  
 [4] 卓崇培, 非线性物理学[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1996.  
 [5] Mark Finlay, Keith A Blanton 著. 曹康, 许学军, 等译. 用 C++ 设计二维、三维分形图形程序[M]. 北京: 北京科学出版社, 1995.

## Investigation for Logistic and Logistic-like Equations

HUANG Man<sup>1</sup>, CAI Biao<sup>2</sup>

(1. School Civil Eng. and Arch., East China Jiaotong Univ ;

2. School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

**Abstract:** This paper investigates Logistic and Logistic-like equations by using Visual-Basic Language and shows their self-similar structures.

**Key Words:** logistic equation; fractal; chaos