

文章编号: 1005-0523(2002)04-0057-04

# 整体弹性关节微型机器人的力学平衡方程

刘平安

(华东交通大学 机电工程学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:**介绍了整体弹性关节三自由度平面并联微型机器人传动学的正、反解问题的建模过程. 整体弹性关节机构由于受运动范围的限制故常在低速下使用, 其动力学问题便成了弹性静力平衡问题, 然而其高度非线性和偶合性, 使正解模型较为复杂, 一般没有封闭解. 文中采用 Newton-Raphson 迭代法介绍正解问题的求解过程, 并利用 Matlab 6.1 编程, 通过实例计算说明了其应用.

**关键词:**整体弹性关节; 并联微型机器人; 静力平衡方程

**中图分类号:** TP242

**文献标识码:** A

## 0 引言

整体弹性关节 (Monolithic Flexure Joints) 机构是相对于传统轴承关节机构提出的, 是指利用整块板材采用线切割等加工方式加工出机构的几何结构<sup>[1][4]</sup>. 其区别主要在于其关节的相对运动是靠其弹性变形来实现的, 即利用弹性变形而非专用部件轴承来传递运动和动力. 与传统轴承关节机构相比它具有十分突出的特征. 首先, 它不存在轴承关节的无法消除的摩擦, 运动副间隙, 也就不存在各运动副的运动误差的累积, 故传动精度高, 可实现精密传动<sup>[2]</sup>. 其次, 由于采用整块材料一次切割成功, 一方面, 无需装配, 结构简单, 具备无装配设计 (Design for Non-assembly) 生产的生产周期短, 成本低的优点; 另一方面, 可以按实际需要而做成尺寸很小的机构, 故结构十分紧凑; 更重要的是, 由于材料性能的一致性, 因而环境因素对整个机构的性能的影响相对由各种不同材料组成的机构要小, 故性能较稳定, 尤其可以通过在结构上的对称布置 (如图 1 所示) 来消除如温差所引起的几何误差. 其不足之处在于, 一方面要求运动副的最大变形即最大相对转角在弹性极限范围内, 其运动学和动力学性能主要由其材料性能和弹性关节尺寸来决定, 尤其是材料的杨氏模量和关节刚度系数、关节力和力矩. 另一方面, 从动力学方面看, 通过计算不难发现即使在输出力为零的情况下, 其运动副反力也相当大, 而且反力与转角几乎成正比关系,

故只能用于角位移范围不大的场合, 更谈不上曲柄的存在了, 这是它应用受到限制的主要原因之一. 目前主要在 (纳米级) 超精密定位机构<sup>[3][5]</sup> 设计中, 尤其微型机器人<sup>[6][7]</sup> 机构设计中得到应用, 当然, 笔者认为同样适合于精密仪器仪表等函数机构中. 综观以上特征, 整体弹性关节机构的应用主要适合于传动范围较小, 速度较低, 惯性质量较轻而运动精度要求高如显微外科、微电子工业等要求超精密定位、传动的场合. 针对这一现象, 其机构的动力学问题中由于各运动构件惯性质量可忽略, 于是动力学问题便成了每一个位置的弹性静力平衡问题. 其研究方法也较传统机构动力学研究方法不同, 其模型为运动学和静力学的组合. 由于其高度非线性和偶合性, 方程一般没有封闭解而只有数值解. 如图 1 为一个三自由度整体弹性关节平面并联微型机器人结构图 (以正三角形为输出构件, 外接对称布置的连杆和输入构件), 本文在运动学模型基础上介绍其传动学模型的建立以及求解的数学过程.

图 A 为图 1 所示并联操作手的系统机构运动简图, 用三组不同的直角坐标系来描述其运动: 固定坐标系  $XOY$ , 其中心  $O$  与输出平台  $S_1 S_2 S_3$  起始位置时 (位移为 0) 的几何中心重合, 它是平台运动的参考坐标系; 运动坐标系  $xoy$ : 固接在输出平台上, 当输出平台位移为 0 时其两坐标轴与  $XOY$  坐标系的两轴重合, 当平台运动到新位置时, 中心  $o$  在  $XOY$  中的坐标值为  $x_0, y_0$ , 两轴与  $XOY$  对应轴夹角为  $\theta_0$ , 平台三顶点  $S_1, S_2, S_3$  到达新的位置  $S'_1, S'_2, S'_3$ , 所以  $x_0, y_0, \theta_0$  的值表示了平台运动时的位置与姿态, 用矢量  $\mathbf{X}$  表示; 三

收稿日期: 2002-05-17

中国期刊网 <http://www.cnki.net> 刘平安, 男, 1962 年生, 华东交通大学副教授.

个分支固定坐标系  $x_i, o_i, y_i$  ( $i=1, 2, 3$ , 下同); 其中心  $o_i$  与三个分支的固定铰链中心相重合,  $y_i$  轴的方向与机构起始位置时的  $o_i D_i$  方向一致, 由于三个分支在空间关于  $O$  点对称分布, 所以三固定坐标与  $XOY$  的方位角始终分别为  $\theta_i = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ , 分支  $i=1, 2, 3$  也是以此顺序来标定的. 设系统在初始位置时连杆  $D_i S_i$  垂直于输入杆  $o_i D_i$  和  $S_i O$ , 三个输入变量为  $o_i D_i$  自起始位置绕  $o_i$  转过的角度  $\theta_{i2} = (\theta_{i2} \quad \theta_{i22} \quad \theta_{i32})^T$ , 输出为平台位置和方位  $X = (x_0 \quad y_0 \quad \theta_0)^T$ . 所有角度约定逆时针方向为正, 顺时针方向为负. 三顶点  $S_i$  至平台中心  $O$  距离为  $c$ , 三连杆  $D_i S_i$  长为  $h$ , 三输入杆  $o_i D_i$  长为  $l$ .

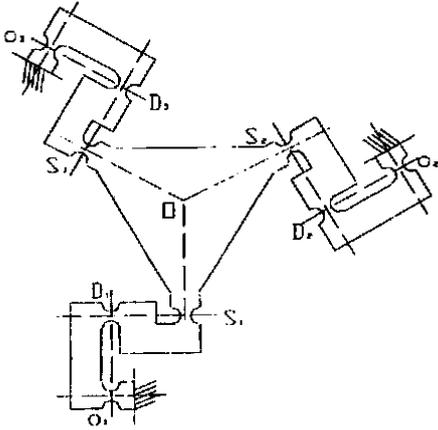


图1 系统结构图

### 1 传动正解模型

传动正解模型是指给定系统输入力或力矩求输出平台的位移和姿态参数. 如图2为系统机构运动简图, 当给定输入力矩  $M = (M_1 \quad M_2 \quad M_3)$  时, 求平台位姿参数  $X = (x_0 \quad y_0 \quad \theta_0)$ . 由于涉及到输入杆  $DO$  及连杆  $DS$  转角  $\theta_{i2}$  和  $\theta_{i3}$  ( $i=1, 2, 3$ ), 故加上这六个中间变量共有9个未知数.

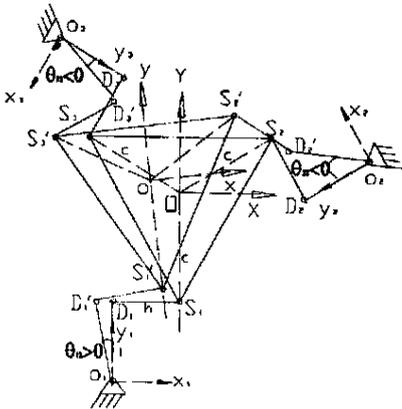


图2 系统运动简图

图3(a, b, c)是系统内各构件受力图, 分别代表输出平台  $S_1 S_2 S_3$ , 连杆  $D_i S_i$  和输入构件  $o_i D_i$  的受力情况. 设各关节相对位移均在材料弹性变形范围内, 不计各构件的惯性质量, 还有平台所受的工作阻力或阻力矩. 由此求系统在

驱动力矩  $M = (M_1, M_2, M_3)$  的作用下输出平台的位姿和各活动构件的角位移. 图3中设各运动副反力为  $R$  (用三个下标标定其属性, 第一个  $x$  或  $y$  指定  $R$  在分支坐标系  $x_i, o_i, y_i$  中的方向, 第二个大写字母指定其作用的关节, 第三个  $i=1, 2, 3$  指定其属于的分支), 其对应反作用力为  $R'$  (为减少未知数数量, 方程中直接用  $R' = -R$  代替  $R'$ ).

对平台列平衡方程如下(见图3a):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad R_{xs1} - (R_{xs2} + R_{xs3}) \sin 30^\circ - (R_{ys2} - R_{ys3}) \cos 30^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \quad R_{ys1} + R_{xs2} \cos 30^\circ - R_{ys2} \sin 30^\circ - R_{xs3} \cos 30^\circ - R_{ys3} \cos 30^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_0 = 0 & \quad (R_{xs1} - (R_{xs2} + R_{xs3})) c \cos \theta_0 + (R_{ys1} + R_{ys2} + R_{ys3}) c \sin \theta_0 + k(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33} - 3\theta_0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

对连杆  $D_i S_i$  列平衡方程如下(见图3b):

$$\sum F_y = 0 \quad R_{yD_i} = R_{yS_i} \quad (4)$$

$$\sum F_x = 0 \quad R_{xD_i} = R_{xS_i} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{D_i} = 0 & \quad R_{xS_i} h \sin \theta_{i3} - R_{yS_i} h \cos \theta_{i3} - k(\theta_{i3} - \theta_0) - k(\theta_{i3} - \theta_{i2}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

对输入杆  $o_i D_i$  列平衡方程(见图3c),

$$\sum F_y = 0 \quad R_{yO_i} - R_{yD_i} = 0 \quad (7)$$

$$\sum F_x = 0 \quad R_{xO_i} - R_{xD_i} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum M_0 = 0 & \quad R_{xD_i} l \cos \theta_{i2} - k\theta_{i2} - k(\theta_{i2} - \theta_{i3}) + M_i + R_{yD_i} l \sin \theta_{i2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由方程(4)、(5)、(6)和方程(9)我们得到  $R_{xS_i}$  和  $R_{yS_i}$  分别为

$$R_{xS_i} = \frac{-h[M_i - k(2\theta_{i2} - \theta_{i3})] \cos \theta_{i3} + lk(2\theta_{i3} - \theta_0 - \theta_{i2} \sin \theta_{i2})}{lh \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})} \quad (10)$$

$$R_{yS_i} = \frac{-h[M_i - k(2\theta_{i2} - \theta_{i3})] \sin \theta_{i3} + lk(2\theta_{i3} - \theta_0 - \theta_{i2} \cos \theta_{i2})}{lh \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})} \quad (11)$$

上列各式中的  $k$  为关节扭转刚度系数<sup>[8]</sup>.

将上两式分别以  $i=1, 2, 3$  代入方程(1), (2)和(3), 便得到三个反映未知数  $\theta_{i2}, \theta_{i3}, \theta_0$  和输入力矩  $M$  之间关系的力平衡方程. 另外由位移关系有下列三角方程

$$\begin{aligned} x_0 + c \sin(\theta_i + \theta_0) + l \sin(\theta_i + \theta_{i2}) - h \cos(\theta_i + \theta_{i3}) - (l + c) \sin \theta_i + h \cos \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -y_0 + c \cos(\theta_i + \theta_0) + l \sin(\theta_i + \theta_{i2}) + h \sin(\theta_i + \theta_{i3}) - (l + c) \cos \theta_i - h \sin \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

将方程(12), (13)以及方程(1), (2), (3)写成函数表达式如下

$$\begin{aligned} f_j &= x_0 + c \sin(\theta_i + \theta_0) + l \sin(\theta_i + \theta_{i2}) - h \cos(\theta_i + \theta_{i3}) - (l + c) \sin \theta_i + h \cos \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (14a)$$

$j=1, 2, 3$ , 对应  $i=1, 2, 3$

$$\begin{aligned} f_m &= -y_0 + c \cos(\theta_i + \theta_0) + l \cos(\theta_i + \theta_{i2}) + h \sin(\theta_i + \theta_{i3}) - (l + c) \cos \theta_i - h \sin \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (14b)$$

$m=4, 5, 6$ , 对应  $i=1, 2, 3$

$$f_7 = -2R_{xS1} - (R_{xS2} + R_{xS3}) - \sqrt{3}(R_{yS2} - R_{yS3}) = 0 \quad (14c)$$

$$f_8 = 2R_{yS1} + \sqrt{3}(R_{xS2} - R_{xS3}) - (R_{yS2} + R_{yS3}) = 0 \quad (14d)$$

$$f_9 = R_{xS1} + R_{xS2} + R_{xS3} c \cos \theta_0 + (R_{yS1} + R_{yS2} + R_{yS3}) c \sin \theta_0$$

$$+k(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33} - 3\theta_0) = 0 \quad (14e)$$

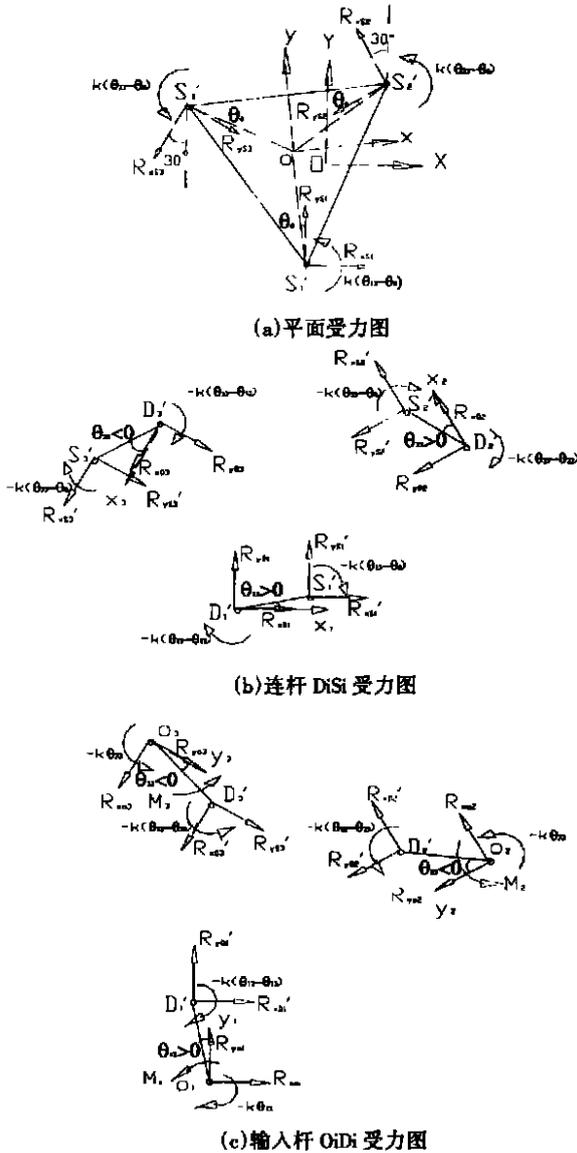


图3 平台、连杆、输入杆受力图

其中  $i=1, 2, 3$ ,  $R_{sSi}$ ,  $R_{ySi}$  如式(10)和(11). 以上共9个方程, 分别用  $f_1$  到  $f_9$  表示, 其9个未知数按顺序为  $(x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \theta_{12} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{13} \ \theta_{23} \ \theta_{33})^T$ . 由于高度非线性和偶合性, 该方程组无封闭解, 采用 Newton-Raphson 迭代法求其数值解<sup>[9]</sup>.

对  $f_1$  至  $f_9$  分别关于  $x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \theta_{12} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{13} \ \theta_{23} \ \theta_{33}$  求偏导数  $\frac{\partial f_i}{\partial S_j}$  ( $i=1, 2, \dots, 9; j=1, 2, \dots, 9$ ), 得到一个  $9 \times 9$  的导数矩阵  $DF$ , 当它为非奇异阵时, 利用它构成下面的迭代计算式,

$$DS = DF^{-1} * (-f)$$

$$S_{n+1} = S_n + DS$$

式中  $S = (x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \theta_{12} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{13} \ \theta_{23} \ \theta_{33})^T$ ,  $f = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9)^T$ ,  $S_n$  代表第  $n$  次迭代后的  $S$  矢量值, 可以选取  $S_0 = 0$  作为迭代运算的初始

值, 而范数  $\text{nom}(f) \times 1e-12$  作为迭代终止条件.

有趣的是上面过程中如令  $k=0$  即为采用轴承转动副的传统机构不计运动副摩擦和构件惯性质量时的动力学方程.

## 2 传动反解模型

传动反解模型指的是给定机构的位姿参数  $X = (x_0 \ y_0 \ \theta_0)^T$ , 由反解运动学得到各转角值  $(\theta_{12} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{13} \ \theta_{23} \ \theta_{33})$ , 即已知  $S = (x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \theta_{12} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{13} \ \theta_{23} \ \theta_{33})^T$  的情况下, 求所需的力矩  $M = (M_1 \ M_2 \ M_3)^T$  以及机构所处位置时的各运动副反力  $R$ . 并联机构的运动学和动力学与串联机构正好相反, 反解模型容易求解而正解模型却较为复杂. 下面介绍如图1所示整体弹性关节三自由度平面并联微型机器人的传动反解模型及其求解过程.

由给定的位姿参数便可直接由式(10)和(11)得到关节反力  $R$  与输入力矩  $M$  的关系, 改写式(10)和(11)如下

$$R_{sSi} = r_i M_i + t_i \quad (15a)$$

$$R_{ySi} = q_i M_i + p_i \quad (15b)$$

其中

$$r_i = -\frac{\cos \theta_{i3}}{l \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})}$$

$$t_i = \frac{h(2\theta_{i2} - \theta_{i3}) \cos \theta_{i3} + l(2\theta_{i3} - \theta_0 - \theta_{i2}) \sin \theta_{i2}}{l h \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})} k$$

$$q_i = -\frac{\cos \theta_{i3}}{l \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})}$$

$$p_i = \frac{h(2\theta_{i2} - \theta_{i3}) \sin \theta_{i3} + l(2\theta_{i3} - \theta_0 - \theta_{i2}) \cos \theta_{i2}}{l h \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})} k$$

将式(15a), (15b)代入到方程(1), (2), (3)中, 便得到关于  $M = (M_1 \ M_2 \ M_3)^T$  的线性方程组. 写成矩阵形式如下:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中

$$b_{11} = 2r_1$$

$$b_{12} = -(r_2 + \sqrt{3}q_2)$$

$$b_{13} = \sqrt{3}q_3 - r_3$$

$$b_{14} = t_2 + t_3 - 2t_1 + \sqrt{3}p_2 - \sqrt{3}p_3$$

$$b_{21} = 2q_1$$

$$b_{22} = -(q_2 - \sqrt{3}r_2)$$

$$b_{23} = -(q_3 + \sqrt{3}r_3)$$

$$b_{24} = -\sqrt{3}t_2 + \sqrt{3}t_3 - 2p_1 + p_2 + p_3$$

$$b_{31} = c(r_1 \cos \theta_0 + q_1 \sin \theta_0)$$

$$b_{32} = c(r_2 \cos \theta_0 + q_2 \sin \theta_0)$$

$$b_{33} = c(r_3 \cos \theta_0 + q_3 \sin \theta_0)$$

$$b_{34} = -k(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33} - 3\theta_0) - c(t_1 + t_2 + t_3) \cos \theta_0 - c(p_1 + p_2 + p_3) \sin \theta_0$$

由式(16)求出  $M$  以后, 代回到式(15a)和(15b)得到平

台各运动副反力  $R_{xSi}$  和  $R_{ySi}$ , 再由式(4), (5), (7), (8)得到其它运动副反力  $R_{xDi}$ ,  $R_{yDi}$ ,  $R_{xOi}$  和  $R_{yOi}$ .

### 3 计算实例

如图3所示并联操作手, 给定机构尺寸为:  $c=40$  mm,  $h=20$  mm,  $l=30$  mm, 由厚度为  $b=5$  mm 的普通钢板切割而成, 其关节尺寸(如图4)为:  $t=1$  mm,  $r=4.5$  mm,  $w=10$  mm,  $E=200$  GPa(即  $10^9$  N/m<sup>2</sup>)为材料杨氏模量, 则关节扭转刚度系数  $k=31.758$  1 N·m/Rad<sup>[8]</sup>, 不计各活动构件质量和转动惯量, 三个输入力矩为  $M=(12 \quad -34 \quad 65)^T$  N·m, 其迭代初始值为  $S=(0.000 \quad 0 \quad 0.000 \quad 2 \quad -0.001 \quad 0 \quad 0.007 \quad 0 \quad 0.007 \quad 4 \quad 0.008 \quad 0 \quad 0.005 \quad 0 \quad -0.005 \quad 0 \quad 0.000 \quad 7)^T$ , 第一、二分量为  $x_0$ ,  $y_0$ , 单位为 m, 其它均为角度, 单位为 rad. 采用 Matlab6.1 编程运算的结果如下:

正解时经6次迭代历时0.05秒后得到  $S=(0.000 \quad 7 \quad 0.008 \quad 8 \quad -8.640 \quad 9 \quad 5.666 \quad 0 \quad -3.461 \quad 2 \quad 27.819 \quad 4 \quad 28.143 \quad 6 \quad -13.001 \quad 1 \quad 0.276 \quad 1)^T$ ; 此处  $x_0$ ,  $y_0$  量纲仍为 m, 但后面七个角度分量量纲为度. 其迭代范数为  $4.5475e-012$ .

利用正解得到的系统位置解  $S$  作为输入值代入到反解模型中, 得到所需的输入力矩为  $M=(12 \quad -34 \quad 65)^T$  N·m, 从而验证其模型的正确性.

### 4 结语

本文以一个三自由度整体弹性关节平面并联微型机器人为应用实例, 介绍其传动力学模型的建立过程, 因其工作空间限制其应用常在低速, 故动力学问题变成静力平衡问题. 然而由于非线性和耦合性的存在, 正解模型一般较为复杂而无封闭位置解存在, 文中介绍了利用 Newton-Raphson 迭代法求其数值解的过程. 最后利用 Matlab6.1 编程对实例进行计算, 对于整体弹性关节并联微型操作手的传动力学分析具有普遍性的意义. 为并联微型机器人研究尤其控制系统的设计提供了有利的工具.

### 参考文献:

- [1] Jae, W., Ryu, D. G. and Kee, S. M., Optimal design of a flexure hinge based XY wafer stage, Precision Engineering, 1997, Vol. 21, pp. 18-28.
- [2] A. Codourey, E. Burdet A Body-oriented Method for Finding a Linear Form of the Dynamic Equation of Fully Parallel Robots, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, p1612~1618, Albuquerque, New Mexico April 1997.
- [3] Gosselin-CM; Lemieux-S; Merlet-J-P, A New Architecture of Planar Three-degree-of-freedom Parallel Manipulator, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, p3738~43, New York, NY, USA; April, 1996.
- [4] Pang-H, Shahinpoor-M, Inverse Dynamics of a parallel manipulator, Journal of Robotic Systems, vol. 11 no.8; Dec. 1994; p. 693-702.
- [5] Kim-S, Lee-S, Cartesian Space Dynamic Model of Serial-parallel Manipulator Systems and their Dynamic Performances Evaluation, Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, New York, Ny, USA, 1992, (4) vol. 3822, 327~328 vol.1.
- [6] Toriumi. M., Positioning Technique in Semiconductor Manufacturing Equipment[J]. JSPE 1991, 57 24~28.
- [7] Grace K W. and Colgate J E. A Six-DOF Micro-manipulator for Ophthalmic Surgery. IEEE Conf. On Rob. & Aut., 1993, 630~635.
- [8] S. T. Smith and D. G. Chetwynd, Foundations of ultra-precision mechanism design Gordon and Breach Science Publishers, 1992, 181~215.
- [9] 冯 康, 等. 数值计算方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1978.
- [10] 黄 真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论与控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- [11] 方跃法, 黄 真. 六自由度并联机器人弹性动力学模型[J]. 机械科学与技术. 1990, 90(1); 62~69.

## Static Balancing Equation of Micro-Manipulators with Monolithic Flexure Joints

LIU Ping-an

(School of Mechatronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi, 330013 China)

**Abstract:** The forward and inverse dynamics modeling of 3-DOF planar parallel micro-manipulators with monolithic flexure joints is presented in this paper, which has become an elastically static balancing problem due to the limitation of workspace. However, the forward model is more difficult, and generally, closed-form solutions doesn't exist, because of highly non-linearity and coupling. The process to solve the forward problem with Newton-Raphson iterative method is shown to search for the system position and orientation solutions, finally a case study is also introduced with Matlab 6.1.

**Key words:** monolithic flexure joints; parallel micro-manipulators; static balancing equations