文章编号:1005－0523(2003)01－0082－04

关于 Queens-图的若干结果

邓毅雄[1], 熊金泉[2], 王 森[1], 万洛简[1]

(1. 华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013; 2. 江西教育学院 数学与计算机系, 江西 南昌 330029)

摘要:Queens-图是文献[1]引入的概念,本文给出了 queens-图的几个结论,并找到了几类 queens-图.

关 键 词:图;(0,1)－矩阵;Queens-图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

0 引 言

本文所讨论的图都是简单图,文中未加说明的术语和符号参阅文献[2][3]. 文献[1]引入了 queens-图的概念,并得到了几类 queens-图.

设 A 是(0,1)-矩阵. 一个图称为 A 的 queens-图,记为 $Q(A)$,如果这个图的点与 A 的 1 相对应,两个点邻接当且仅当它们对应在 A 中的 1 同在某线或对角线上.(这里的"线"是指矩阵的行或列.)

我们说一个图 G 是 queens-图,如果 G 是某(0,1)-矩阵的 queens-图. 这方面研究的一个主要问题是:哪些图是 queens-图? 文献[1]证明了一定条件下完全块图、树、$K_n \times P_m$、$P_n \times P_m$、$C_{2n} \times P_m$ 等是 queens-图,并解决了二部及多部图的问题.

确定一个图 G 是否为 queens-图,就是确定 G 所对应的(0,1)-矩阵 A,也就是确定 A 中 1 的坐标(i,j),即是确定 G 的点的坐标(i,j). 另外注意到,queens-图 G 对应的(0,1)-矩阵 A 的转置矩阵 A^T 对应的 queens-图仍然是 G.

引理 1[1] 图 G 是 queens-图当且仅当它的点可以对应坐标(i,j),并且两个不同的点(i,j)和(k,l)邻接当且仅当(1) $i=k$,或(2) $j=l$,或(3) $i+j=k+l$,或(4) $i-j=k-l$.

为方便,我们用 H_s、V_s、P_s、M_s 分别表示点集 S 中所有点所在的行线、列线、正对角线、负对角线的集合,点 u 的行线、列线、正对角线、负对角线分别表示为 H_u、V_u、P_u、M_u. 用 L_G 表示 queens-图 G 的所有线的集合. 任意 queens-图总是位于某些上述类型的线所围成的区域内.

设 G 是 queens-图, $u \in V(G)$,若在 G 的(0,1)－矩阵中有 k 条线上只包含 u,则称 u 为 G 对应(0,1)－矩阵的 k 线自由点,简称 k 线点或非饱和点. 如果 $k=0$,称 u 为 G 的饱和点.

引理 2[1] 如果图 G 是 queens-图,那么 G 不包含导出子图 $K_{1,5}$.

易于证明:

引理 3 圈 C_n 是 queens-图.

1 Queens-图的扩充

对图 G_1、G_2,若 $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$, u 是 G_1、G_2 外的一点,将 u 与 G_1 的点 v_1 和 G_2 的点 v_2 邻接所得之图记为 $G_1 \odot_{v_1} u v_2 \odot G_2$. 如若 G_1、G_2 都是圈,如此得到的图记为 $C_m \odot u \odot C_n$.

定理 1 设 G_1、G_2 都是 queens-图,若存在点 $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$是 $G_i(i=1,2)$对应的(0,1)-矩阵的非饱和点, $u \notin V(G_1 \cup G_2)$,则图 $G_1 \odot_{v_1} u v_2$

收稿日期:2002－10－12

作者简介:邓毅雄(1963－),男,江西新干人,华东交通大学副教授.

$\odot G_2$ 是 queens-图．

证明：设 G_1 位于 $x=a_1, x=a_2(a_1\leqslant a_2)$；$y=b_1, y=b_2(b_1\leqslant b_2)$；$y=x+c_1, y=x+c_2(c_1\leqslant c_2)$；$y=-x+d_1, y=-x+d_2(d_1\leqslant d_2)$所围成的区域内．不失一般性，设 Hv_1 线中只包含 v_1．

情形1　当 Vv_2 线只包含 $v2$ 时，首先将 G_2 适当置于 $y<b_1, x>a_2, y>x+c_1, y>-x+d_2$ 的区域内，这样 G_2 与 G_1 的任意点均不在同一线上；再在 Hv_1 线上适当确定点 u 的位置，使 $Hu=Hv_1, Vu=Vv_2$，这样得到的 queens-图就是 $G_1\odot v_1uw_2\odot G_2$．

情形2　当 Pv_2 线只包含 v_2 时，首先将 G_2 适当置于 $y>b_2, x>a_2, y<x+c_2, y>-x+d_2$ 的区域内，这样 G_2 与 G_1 的任意点均不在同一线上；再在 Hv_1 线上适当确定点 u 的位置，使 $Hu=Hv_1, Pu=Pv_2$，这样得到的 queens-图就是 $G_1\odot v_1uw_2\odot G_2$．

情形3　当 Hv_2 线或 Mv_2 只包含 v_2 时，将 G_2 对应的(1,0)-矩阵转置，问题就转化为情况1或情况2的情形．

综上所述，图 $G_1\odot v_1uw_2\odot G_2$ 是 queens-图．

定理1可以推广到有限个图的情形．

推论1　设 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$都是 queens-图，若存在点 $v_1\in V(G_1), v_{ij}\in V(G_i)(i=2,3,\cdots,k-1, j=1,2), v_k\in V(G_k)$，且 $v_1, v_{ij}(i=2,3,\cdots,k-1, j=1,2), v_k$ 都是对应图的(0,1)-矩阵的非饱和点，$u_t\notin V(G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k)$ $(t=1,2,\cdots,k-1)$，则图 $G_1\odot v_1u_1v_{21}\odot G_2\odot v_{22}u_1v_{31}\odot G_3\cdots G_{k-1}\odot v_{k-1,2}u_{k-1}v_k\odot G_k$ 是 queens-图．

由引理3，圈 C_n 都是 queens-图，且每个点都有两条线只包含此点，所以我们有

推论2　对于整数 $m_i(i=1,2,\cdots,k)$，$u_j(j=1,2,\cdots,k-1)$，图 $C_{m1}\odot u_1\odot C_{m2}\cdots\odot u_{k-1}\odot C_{mk}$ 是 queens-图．

我们称在图 G 的某些点上粘接若干条悬挂边所得到的图为 G 的冠状扩充图．特别当 G 为圈 C_n 时，在 C_n 的每个点上粘接 m 条悬挂边的所得冠状扩充图称为皇冠图，记为 $C_n\odot mK_1$．

引理4　设 G 是 queens-图，$u\in V(G)$，且 u 为 G 的 k 线点($1\leqslant k\leqslant 3$)，则在 u 上粘接 k 条悬挂边所得之图仍是 queens-图．

证明：不妨设 H_u 上只包含点 u，我们总可以增加点 $v\notin V(G)$，使 $H_v=H_u$，但 $V_v, P_v, M_v\notin L_G$．这样就在 u 上粘接了悬挂点 v，得到在 u 上粘接一条悬挂边的 queens-图；如此可以继续 k 次($1\leqslant k\leqslant 3$)，得到在 u 上粘接 k 条悬挂边的 queens－图．

我们连续应用引理4，有

定理2　若 queens-图 G 的所有非饱和点 v_i 是 $k_i(i=1,2,\cdots,t)$线的，那么在 v_i 上各粘接 k_i 条悬挂边所得之图仍为 queens-图．

由引理2，当 $m\geqslant 3$ 时，$C_n\odot mK_1$ 不是 queens-图．又由引理3知，C_n 是 queens-图且其每个点都是2线点，所以结合定理2，有

推论3　皇冠图 $C_n\odot mK_1$ 是 queens-图当且仅当 $m=1$ 或 $m=2$．

文献[2]给出了树是 queens-图的情况，由于 K_2 是 queens-图，所以利用定理2，对 K_2 进行扩充，我们也能得到与文献[1]相同的结果：

推论4　树 T 是 queens-图当且仅当 T 不含导出子图 $K_{1,5}$．

2　关于 θ-图的 queens 问题

对于由一点 A 至另一点 B 的三条互不相交的路组成的图，如果这三条路中最多有一条的长度为1，则称该图为 θ-图．如果这三条路自上而下的长度分别为 k, m, n，记该 θ-图为 $\theta(k,m,n)$-图，在下面讨论中，我们不妨假设 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$．

定理3　$\theta(k,m,n)$－图是 queens-图．

证明：$\theta(k,m,n)$－图也可以看成是将路 Pn 的两个端点分别与圈 C_{k+m} 的两个距离为 k 或 m 的点粘合所得到的图．设 $V(C_{k+m})=\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,\cdots,k+m\}$，$V(\theta(k,m,n))\setminus V(C_{k+m})=\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$．下面分别对 $k+m$ 为偶数或奇数的情形进行讨论．

情形1　当 $k+m$ 为偶数时，设 $k+m=2t$，显然此时 $t\geqslant 2$．

情形1.1　当 $t=2$ 时，$k\leqslant 2$．令 $x_1^{(1)}=0, y_1^{(1)}=0, x_2^{(1)}=2, y_2^{(1)}=0, x_3^{(1)}=2, y_3^{(1)}=1, x_4^{(1)}=0, y_4^{(1)}=3$，

情形1.1.1　当 $k=1$ 时，此时 $n\geqslant m=3$，令 $x_1^{(2)}=5, y_1^{(2)}=4, x_2^{(2)}=7, y_2^{(2)}=4$，

$x_i^{(2)}=5+i$，

$y_i^{(2)}=4+?(i-1)/2\rfloor$　$(i=3,4,\cdots,n-2)$

$x_{n-1}^{(2)}=n+3$，$y_{n-1}^{(2)}=n+1$；

情形1.1.2　当 $k=2$ 时，此时 $n\geqslant m=2$，

如果 $n=m=2$ 如图1所示；

如果 $n>2$，令 $x_1^{(2)}=1, y_1^{(2)}=4, x_2^{(2)}=7, y_2^{(2)}=4$，

$x_i^{(2)}=5+i, y_i^{(2)}=4+\lfloor (i-1)/2\rfloor \quad (i=3,4,\cdots,n-2)$

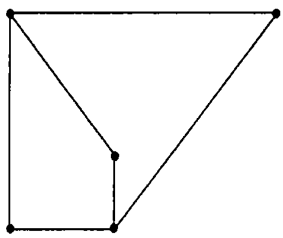


图1 $\theta(2,2,2)$

$x_{n-1}^{(2)}=n+3, y_{n-1}^{(2)}=n+1$.

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么 $t=2$ 时，$\theta(k,m,n)$ 一图是 $\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,\cdots,2t\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的queens一图.

情形1.2 当 $t>2$ 时，令 $x_1^{(1)}=0, y_1^{(1)}=0, x_2^{(1)}=2t-3, y_2^{(1)}=0$，

$x_i^{(1)}=2t-i$,

$y_i^{(1)}=2t+\lfloor i/2\rfloor-5 \quad (i=3,4,\cdots,2t)$,

情形1.2.1. 当 $k\leqslant(2t-1)/3$ 时，令 $x_1^{(2)}=3t-k-\lfloor k/2\rfloor-2, y_1^{(2)}=3t-4, x_2^{(2)}=5t-6, y_2^{(2)}=3t-4$,

$x_i^{(2)}=5t+i-8$,

$y_i^{(2)}=3t+\lfloor (i-1)/2\rfloor-4 \quad (i=3,4,\cdots,n-2)$

$x_{n-1}^{(2)}=5t+n-10, y_{n-1}^{(2)}=3t+n-7$;

情形1.2.2 当 $(2t-1)/3<k\leqslant m$ 时，令

$x_1^{(2)}=2t-2, y_1^{(2)}=2t+k+\lfloor k/2\rfloor-4$,

$x_2^{(2)}=4t+k+\lfloor k/2\rfloor-6$,

$y_2^{(2)}=2t+k+\lfloor k/2\rfloor-4$,

$x_i^{(2)}=4t+k+\lfloor k/2\rfloor+i-8$,

$y_i^{(2)}=2t+k+\lfloor k/2\rfloor+\lfloor (i-1)/2\rfloor-4$

$(i=3,4,\cdots,n-2)$

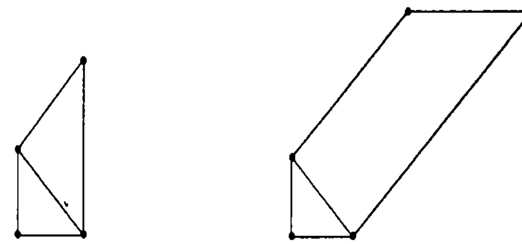
$x_{n-1}^{(2)}=4t+k+\lfloor k/2\rfloor+n-10$,

$y_{n-1}^{(2)}=2t+k+\lfloor k/2\rfloor+n-7$.

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么 $t>2$ 时，$\theta(k,m,n)$ 一图是 $\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,\cdots,2t\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的queens一图.

情形2 当 $k+m$ 为奇数时，设 $k+m=2t+1$，显然此时 $t\geqslant1$.

情形2.1 当 $t=1$ 时，此时只有 $k=1$. 令 $x_1^{(1)}=0, y_1^{(1)}=0, x_2^{(1)}=1, y_2^{(1)}=0, x_3^{(1)}=0, y_3^{(1)}=1$. 对于 $n=2,3$ 的情形如图2所示：



(a) $\theta(1.2,2)$ (b) $\theta(1,2,3)$

图2

当 $n\geqslant4$ 时，令 $x_1^{(2)}=2, y_1^{(2)}=3, x_2^{(2)}=4, y_2^{(2)}=3$,

$x_i^{(2)}=i+3$,

$y_i^{(2)}=3+\lfloor (i-1)/2\rfloor \quad (i=3,4,\cdots,n-2)$

$x_{n-1}^{(2)}=n+1, y_{n-1}^{(2)}=n$.

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么 $\theta(1,2,n)$ 一图是 $\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,3\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的queens一图.

情形2.2 当 $t=2$ 时，此时只有 $k=1$ 或 $k=2$，此时 $n\geqslant3$. 令 $x_1^{(1)}=0, y_1^{(1)}=0, x_2^{(1)}=2, y_2^{(1)}=0, x_3^{(1)}=2, y_3^{(1)}=3, x_4^{(1)}=1, y_4^{(1)}=4, x_5^{(1)}=0, y_5^{(1)}=4$. 如果 $k=1$，令 $x_1^{(2)}=6, y_1^{(2)}=3, x_i^{(2)}=i+6, y_i^{(2)}=4+\lfloor i/2\rfloor\ (i=2,3,\cdots,n-2), x_{n-1}^{(2)}=n+4, y_{n-1}^{(2)}=n+2$. 如果 $k=2$，令 $x_1^{(2)}=3, y_1^{(2)}=6, x_2^{(1)}=9, y_2^{(1)}=6, x_i^{(2)}=i+7, y_i^{(2)}=6+\lfloor (i-1)/2\rfloor\ (i=2,3,\cdots,n-2), x_{n-1}^{(2)}=n+5, y_{n-1}^{(2)}=n+3$.

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么此时的 $\theta(k,m,n)$ 一图是 $\{v^{(1)}\ i=1,2,\cdots,5\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的queens一图.

情形2.3 当 $t\geqslant3$ 时，令 $x_1^{(1)}=0, y_1^{(1)}=0, x_2^{(1)}=2t-2, y_2^{(1)}=0, x_i^{(1)}=2t-i+1, y_i^{(1)}=2t+\lceil (i-1)/2\rceil-4\ (i=3,4,\cdots,2t+1)$,

情形2.3.1 若 $k\leqslant(2t+1)/3$，令

$x_1^{(2)}=3t-k-\lceil (k+1)/2\rceil$,

$y_1^{(2)}=3t-3, x_2^{(2)}=5t-4$,

$y_2^{(2)}=3t-3$,

$x_i^{(2)}=5t+i-6$,

$y_i^{(2)}=3t+\lceil i/2\rceil-4 \quad (i=3,4,\cdots,n-2)$

$x_{n-1}^{(2)}=5t+n-8$,

$y_{n-1}^{(2)}=3t+n-6.$

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么此时的 $\theta(k,m,n)$ 一图是 $\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,\cdots,2t+1\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的 queens-图.

情形 2.3.2　若 $(2t+1)/3<k\leqslant m$，令

$x_1^{(2)}=2t-1,\ y_1^{(2)}=2t+k+\lceil(k+1)/2\rceil-4,$

$x_2^{(2)}=4t+k+\lceil(k+1)/2\rceil-5,$

$y_2^{(2)}=2t+k+\lceil(k+1)/2\rceil-4,$

$x_i^{(2)}=4t+k+\lceil(k+1)/2\rceil+i-7,$

$y_i^{(2)}=2t+k+\lceil(k+1)/2\rceil+\lfloor(i-1)/2\rfloor-4$

$(i=3,4,\cdots,n-2)$

$x_{n-1}^{(2)}=4t+k+\lfloor(k+1)/2\rfloor+i-9,$

$y_{n-1}^{(2)}=2t+k+\lfloor(k+1)/2\rfloor+n-7.$

设 $v_i^{(1)}$ 与 $v_j^{(2)}$ 的坐标对应为 $(x_i^{(1)},y_i^{(1)})$ 与 $(x_j^{(2)},y_j^{(2)})$，那么此时的 $\theta(k,m,n)$ 一图是 $\{v_i^{(1)}\mid i=1,2,\cdots,2t+1\}\cup\{v_j^{(2)}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的 queens-图.

综上所述，$\theta(k,m,n)$ 一图是 queens-图.

3　关于图 $B(m,n,r)$ 的 queens 问题

图 $B(m,n,r)$ 是具有公共 Kr 的 m 个 Kn 的图. 下面我们讨论什么时候 $B(m,n,r)$ 是 queens一图?

首先注意到，当 $m\geqslant5$ 时，$B(m,n,r)$ 含导出子图 $K_{1,5}$，所以不是 queens-图. 由于 queens-图 $Kn(n\geqslant6)$ 的唯一表示方法是所有的点都在一条线上，而当 $r\geqslant2,m\geqslant2$ 时，要满足这个条件是不可能的，所以当 $r\geqslant2,m\geqslant2,n\geqslant6$ 时，$B(m,n,r)$ 不是 queens-图.

显然，当 $r=1,m\leqslant4$ 时，将 m 个 K_n 的点分别置于点 K_1 的 m 条线上，有

引理 5　$B(m,n,1)$ 是 queens-图当且仅当 $m\leqslant4$.

引理 6　$B(m,5,2)$ 是 queens-图当且仅当 $m\leqslant2$.

证明：$m=1$ 的情况是显然的. $m=2$ 的情况如图 3 所示.

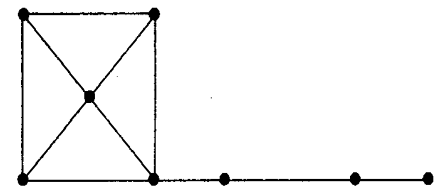
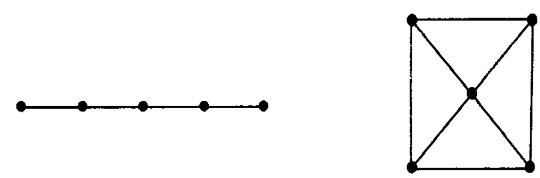


图 3　$B(2,5,2)$

当 $m\geqslant3$ 时，由于 K_5 只有两种表示方法，如图 4 所示，



K_5　(a)　　(b)

图 4

所以，此时不可能存在表示方法.

对其它情况，可类似讨论，最后我们综合得到下面结论：

定理 4　$B(m,n,r)$ 是 queens-图当且仅当

(ⅰ) $r=1,\ m\leqslant4,\ n\leqslant2$；或

(ⅱ) $r=2,m\leqslant3,n=3$；或 $r=2,m\leqslant2,n=4$ 或 5；或

(ⅲ) $r=3,m\leqslant2,n=3,4.$

参考文献：

[1] L. W. Beineke, I. Broere, M. A. Henning, Queens Graphs[J]. Discrete Mathematics 206(1999) 63～75.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, Graphs and Digraphs[M]. Wadsworth Brooks/Cole, Monterey, 1996.

[3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory with Application[M]. The Macmillan Press Ltd, 1976.

Some Results of Queens Graphs

DENG Yi-xiong[1], XIONG Jin-qian[2], WANG Seng[1], WAN Luo-jian[1]

(1. School of Natural Science, East China Jiaotong Univ. Nanchang, 330013, China; 2. Department of Math & Computer Science Jiangxi Education Insitution, Nanchang 330029, China)

Abstract: Queens graphs be introduced by paper[1]. This paper get some results of queens graphs, and show some graphs that is queens graphs.

Key Words: graph; (0, 1)—matrix; queens graphs