文章编号:1005-0523(2003)01-0103-04

基于观测器的多状态时滞系统的鲁棒镇定

徐世建

(株洲铁路职工学校,湖南 株州 412003)

摘要:研究了具有多状态不确定时滞系统的基于观测器的鲁棒镇定问题,通过构造增广矩阵,利用线性矩阵不等式(LMI)方法,获得了该系统存在状态观测器和基于观测器的鲁棒控制器的充分条件,同时给出了相应的状态观测器和基于观测器的鲁棒控制器.最后,给出本文的一个数值算例.

关 键 词:观测器;鲁棒控制器;多状态不确定性;线性矩阵不等式

中图分类号:TP13、TP202　　　　**文献标识码:**A

1 引 言

众所周知,状态反馈控制有很多突出的优点.当系统的状态变量不能观测到时,使用状态观测器来测量状态变量是必要的.因此,基于观测器的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题具有重要的理论意义和工程应用价值.近年来,在这方面已取得了不少的成果[1-4].文[1,2]研究非匹配不确定系统,但没有得到理想的结果;文[3]对满足匹配条件的状态和控制输入不确定系统,导出了求解两个 Racatti 方程的观测器和控制器的设计方法;文[4]讨论了状态和控制输入确定系统的 H_∞ 控制,导出的 Racatti 方程具有一定 H_∞ 性能.

近年来,随着 Matlab 等系统分析软件包的广泛应用,特别是线性矩阵不等式(LMI)方法的引入,克服了 Racatti 方法求解时需预先调整多个参数、计算复杂的不足,使得求解一些复杂的控制变得简单易行,所得结果也具有更低的保守性.本文采用线性矩阵不等式方法,研究具有多状态不确定时滞系统的镇定问题,导出状态反馈控制律的存在条件,这些条件是以线性矩阵不等式的形式给出,可以很方便地用 Matlab 工具包求解.

2 系统描述与假设

考虑如下具有多状态滞后的不确定系统:

$$\dot{x}(t)=(A+\triangle A(r(t)))x(t)+\sum_{j=1}^{n}(A_j+\triangle A_j(s_j(t)))x(t-\tau_j)+(B+\triangle B(q(t)))u(t)$$

$$y=Cx(t),\ \forall\ t\in[-\max(\tau_j),0]$$

这里,$x(t)\in R^n$ 是状态向量;$u(t)\in R^m$ 是控制输入;$x(t-\tau_j)\in R^n$ 是状态滞后向量;$y(t)\in R^r$ 是测量输出;$A\in R^{n\times n}$, $A_j\in R^{n\times n}$, $j=1,\cdots,n$, $B\in R^{n\times m}$ 是已知的适当维数的实值常数矩阵;$\triangle A(r(t))$, $\triangle A_j(s_j(t))$, $\triangle B(q(t))$ 是适当维数的连续不确定性,它们反映了系统模型中的状态、状态滞后、输入的时变参数不确定

收稿日期:2002-06-17

作者简介:徐世建(1972-),男,湖北安陆人,助讲.

性；$\varphi(t)\in C[-\max(\tau_j),0]$为给定的连续初始向量函数.

假设1 对所有的 $t\geqslant 0$, $r(t)$, $s_j(t)$, $q(t)$是Lebesque 可测矢量函数，且：

$$\begin{aligned}&\Psi=\{r,(t)\in R^k;\quad |r_i(t)|\leqslant\bar{r},i=1,2,\cdots,k;\quad \bar{r}\geqslant 0\}\\&\Gamma_j=\{s_j(t)\in R^{l_j};\quad |s_{ji}(t)|\leqslant\bar{s}_j,i=1,2,\cdots,l_j;\quad \bar{s}_j\geqslant 0\},j=1,2,\cdots,n\\&\Theta=\{q(t)\in R^m;\quad |q_i(t)|\leqslant\bar{q},i=1,2,\cdots,m;\quad \bar{q}\geqslant 0\}\end{aligned}\tag{2}$$

假设2 不确定性矩阵$\triangle A(r(t))$, $\triangle A_j(s_j(t))$, $\triangle B(q(t))$满足

$$\begin{aligned}&\triangle A(r(t))=B(\textstyle\sum_{i=1}^{k}A_{i r_i}(t));\\&\triangle B(q(t))=B(\textstyle\sum_{i=1}^{m}B_iq_i(t));\\&\triangle A_j(s_j(t))=B(\textstyle\sum_{i=1}^{l_j}A_{ji}s_{ji}(t)),j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{3}$$

其中：$A_i=d_ie_i^T$; $A_{ji}=f_{ji}g_{ji}^T$; $B_i=h_iw_i^T$; $d_i,e_i,f_{ji},g_{ji},h_i,w_i$ 均为相应维数的列向量.

假设3 对系统(1), (A,B)能控, (C,A)能观.

假设4 $A_j=BH_j$

在以下推导中定义：

$$\begin{aligned}&T=\bar{r}\textstyle\sum_{i=1}^{k}d_id_i^T;\quad U=\bar{r}\sum_{i=1}^{k}e_ie_i^T;\quad S_j=\bar{s}_j\sum_{i=1}^{l_j}g_{ji}g_{ji}^T;\quad W_j=\bar{s}_j\sum_{i=1}^{l_j}f_{ji}f_{ji}^T;\\&V=\bar{q}\textstyle\sum_{i=1}^{m}h_ih_i^T;\quad Q=\bar{q}\sum_{i=1}^{m}w_iw_i^T;\quad Z_j=\bar{s}_j^2\sum_{i=1}^{m}|g_{ji}^Tg_{ji}|f_{ji}f_{ji}^T\end{aligned}\tag{4}$$

本文的目的是构造一个满足如下状态方程的状态观测器，来估计系统(1)的状态信息：

$$\dot{z}(t)=Az(t)+Bu(t)+L(y-cz(t))\tag{5}$$

此时，可构造如下形式的无记忆反馈控制来镇定系统(1)：

$$u(t)=-Kz(t)\tag{6}$$

其中，$z(t)\in R^n$ 是观测器状态，L 为观测器增益，K 为控制器增益.

3 主要结论

考虑系统(1)，并定义 $e(t)=x(t)-z(t)$，则由观测器(5)、控制器(6)可构成增广矩阵为：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\\dot{\boldsymbol{e}}(t)\end{bmatrix}=&[\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{A}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\triangle t(\boldsymbol{r}(t))&0\\\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{B}+\triangle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}(t)))\boldsymbol{K}&(\boldsymbol{B}+\triangle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}(t)))\boldsymbol{K}\\0&-\boldsymbol{LC}\end{bmatrix}]\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\\triangle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{K}&\triangle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}(t))\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}+\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_j+\triangle\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{s}_j(t))&0\\\boldsymbol{A}_j+\triangle\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{s}_j(t))&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t-\tau_j)\\\boldsymbol{e}(t-\tau_j)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7}$$

定理1 对于满足假设1—4的系统(1)，如果存在正定对称矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{D}$，使得线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}&\boldsymbol{XU}^{\frac{1}{2}}&\boldsymbol{X}&\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\\\boldsymbol{U}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}&-2^{-1}\boldsymbol{I}_n&0&0\\\boldsymbol{X}&0&-(2\boldsymbol{n})^{-1}\boldsymbol{I}_n&0\\\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{R}&0&0&-2^{-1}\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}<0\tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}&\boldsymbol{YBT}^{\frac{1}{2}}&\boldsymbol{YBV}^{\frac{1}{2}}&\boldsymbol{YBF}_1^{\frac{1}{2}}&\cdots&\boldsymbol{YBF}_n^{\frac{1}{2}}\\\boldsymbol{T}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}&-\boldsymbol{I}_n&0&0&\cdots&0\\\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}&0&-2^{-1}\boldsymbol{I}_n&0&0&\cdots\\\boldsymbol{F}_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}&0&0&-\boldsymbol{I}_n&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\\boldsymbol{F}_n^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}&0&0&0&\cdots&-\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}<0\tag{9}$$

$$\bar{A}=XA^T+AX+B[T+I+2V+F]B^T-BR-R^TB^T$$
$$F_j=H_jH_j^T+H_jS_jH_j^T+W_j+Z_j$$
$$\bar{\bar{A}}=A^TY+YA-DC-C^TD^T+2K^TQK+K^TK$$
$$T=T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}},\quad U=U^{\frac{1}{2}}U^{\frac{1}{2}},\quad Q=Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}},\quad V=V^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}},\quad F_j=F_j^{\frac{1}{2}}F_j^{\frac{1}{2}}$$

则系统(1)可由状态观测器(5)、无记忆反馈控制律(6)鲁棒镇定，其中：$K=RX^{-1}$，$L=DY^{-1}$分别表示状态反馈和观测器增益.

证明　对增广矩阵(7)构造Lyapunov函数：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t))=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_c&0\\0&\boldsymbol{P}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}+\boldsymbol{\Sigma}_{j=1}^{n}\int_{-\tau_j}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\boldsymbol{e}(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2\boldsymbol{I}&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\boldsymbol{e}(s)\end{bmatrix}\boldsymbol{ds}\tag{10}$$

其中$\boldsymbol{P}_c$，$\boldsymbol{P}_0$是正定对称矩阵.对(10)式求时间的导数，并运用如下两个不等式：

$$XY^T+YX^T\leqslant XX^T+YY^T\tag{11a}$$
$$2XY^T+Y\leqslant X^TX+Y^TY\tag{11b}$$

则：

$$\begin{aligned}L(x(t),e(t))\leqslant{}&x^T(t)[A^TP_c+P_cA^T+2U+2nI+2K^TQK-P_cBK-B^TK^TP_c\\&+P_cB(T+I+2V+\textstyle\sum_{j=1}^{n}(H_jH_j^T+H_jS_jH_j^T+W_j+Z_j))B^TP_c]x(t)\\&+e^T(t)[A^TP_0+P_0A^T+K^TK+2K^TQK-P_0LC-C^TL^TP_0+P_0B(T+2V\\&+\textstyle\sum_{j=1}^{n}(H_jH_j^T+H_jS_jH_j^T+W_j+Z_j))B^TP_c]e(t)\end{aligned}$$

显然，由Lyapunov理论，如果不等式

$$\begin{aligned}M={}&A^TP_c+P_cA^T+2U+2nI+2K^TQK-P_cBK-B^TK^TP_c+P_cB[T+I+2V\\&+\textstyle\sum_{j=1}^{n}(H_jH_j^T+H_jS_jH_j^T+W_j+Z_j]B^TP_c<0\end{aligned}\tag{12a}$$

$$\begin{aligned}N={}&A^TP_0+P_0A^T+K^TK+2K^TQK-PP_0LC-C^TL^TP_0+P_0B[T+2V\\&+\textstyle\sum_{j=1}^{n}(H_jH_j^T+H_jS_jH_j^T+W_j+Z_j]B^TP_c<0\end{aligned}\tag{12b}$$

有对称正定解P_c，P_0，则多状态不确定时滞系统(1)可以镇定.

对式(12a)两边分别左乘和右乘P_c^{-1}，并令$X=P_c^{-1}$，$R=KX$，由Schur补可知矩阵不等式(12 a)式等价于式(8)；而对不等式(10b)，令$Y=P_0$，$D=YL$，则矩阵不等式(12b)等价于式(9).

定理证毕.

4　算例

考虑下述不确定系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)={}&\begin{bmatrix}-7&0.0835r_1(t)\\0.125r_2(t)&-5\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-0.6&-0.125s_{11}(t)\\0.125s_{12}(t)&-0.4\end{bmatrix}x(t-\tau_1)\\&+\begin{bmatrix}-0.5&0.014q_1(t)\\0.014q_2(t)&-0.5\end{bmatrix}u(t)\end{aligned}$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x(t)$$

式中$r_1(t)$，$s_{ji}(t)$，$q_i(t)$，$i=1,2$；$j=1$为不确定时变参数，且$|r_i(t)|\leqslant1$，$|s_{ji}(t)|\leqslant1$，$|q_i(t)|\leqslant1$；$i=1,2$；$j=1$.由定理1可得状态观测器和状态反馈增益为：

$$K=\begin{bmatrix}0.74813&0\\0&0.37756\end{bmatrix},L=\begin{bmatrix}6.8048&0\\0&25.443\end{bmatrix}.$$

5 结束语

本文研究了一类具有多状态时滞不确定系统,借助于线性矩阵不等式处理方法,导出系统存在状态观测器和基于观测器的鲁棒控制器的充分条件,通过建立和求解两个特定的线性矩阵不等式,给出一种基于观测器的鲁棒镇定方法,本文给出的结论用线性矩阵不等式的形式给出,具有较低的保守性,而且可以很方便地用matlab的LMI工具箱求解.最后,给出本文的一个数值算例.

参考文献:

[1] Petersen I.R. A Racatti equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems[J]. IEEE Trans. Automat. Control. 1984, 30(9):904~907.

[2] Schmitendorf W.E. Design of Observer based robust stabilizing controllers. Automatica[J]. 1988,24(5):693~696.

[3] 张明君,孙优贤.基于观测器的状态和控制输入不确定时滞系统的鲁棒镇定[J].信息与控制,1998,27(1):11~15.

[4] 关新平,刘奕昌,赵云朋,段广仁.状态和控制输入不确定时滞系统基于观测器的鲁棒 H_∞ 控制[J].控制与决策,1999,14:577~580.

[5] Boyd S., Cgaoui L.E., Feron E., & Balakrishnan V.. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia, SLAM, 1994.

[6] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., & Chilali M.. The LMI Control Toolbox. The Math Works, Inc. 1995.

Robust Stabilization for Observer-based Time-delay System with Multi-state Uncertainty

XU Shi-jian

(Zhuzhou Railway Professional College, Zhuzhou Hunan 412003, China)

Abstract: The problem of robust stabilization for observer-based time-delay system with multi-state uncertainty is studied. In the light of the linear matrix inequality (LMI) approach, a sufficient condition is given for the existence of the state observer and observer-based robust controllers for such uncertain systems. We obtain the state observer and observer-based robust controllers by construction an augmented systems. Finally, numerical examples are given to illustrate the results presented in this paper.

Key words: observer; robust controller; multi-state uncertainty; LMI