第 20 卷第 2 期
2003 年 4 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.20 No.2
Apr., 2003

文章编号:1005-0523(2003)02-0012-03

直梁的特征值反问题及振动设计

包忠有

(华东交通大学 土木建筑学院,南昌 330013)

摘要:根据直梁有限元模型的特点将特征方程 $KX=\lambda MX$ 中 K、M 矩阵表为若干结构参数的函数,即 $K=K(p_1,p_2,\cdots,p_m)$,$M=M(q_1,q_2,\cdots,q_n)$.从而导出以结构参数为未知量的逆特征方程,并分析了可解条件及结构参数对特征数据的敏感性等问题.

关 键 词:直梁;特征值反问题;振动设计

中图分类号:O322　　　文献标识码:A

1 引 言

目前对直梁的特征值反问题的研究就其离散化模型而言,可分为两种类型:1) 离散成弹簧——质量块系统,归结为 Jacobi 矩阵的特征值反问题,这个问题已被很多学者研究[1][2][3].2) Ciadwell 研究了一种特殊的离散型物理模型的特征值反问题.对这二类问题的讨论有两个共同的特点就是:1) 考虑的是标准特征值问题;2) 根据不同边界条件下反对应的完备特征值序列构造矩阵 K、M,在工程实际问题中要得到如此多的特征值是十分困难的.所以应用受到限制.

在结构振动的工程问题中用有限元模型离散结构是非常有效方法,而且振型往往也是非常重要的原始数据.故本文在对空心管进行有限元离散基础上,根据固有频率和固有振型讨论振动设计问题.在数学上的描述就是:根据特征值和特征向量的信息讨论广义特征值反问题,从而构造一对矩阵 K(刚度矩阵)、M(质量矩阵)、建立有限元模型.

2 逆特征方程

空心直管由于其形状因素,其有限元模型可视为直梁.首先,我们考察梁的单元矩阵.

单元刚度矩阵可表为

$$[K]=e[k']+g[k''] \tag{1}$$

其中,$e=EA$,$g=EI$,$[k']$、$[k'']$均为梁单元端点坐标的函数.显然,若坐标值已定,一个单元刚度矩阵就只有两个未知元素 e、g.单元的集中质量矩阵为

$$[m]=p[m'] \tag{2}$$

其中,$p=\rho A$.$[m']$是坐标的函数,所以若坐标值已给出,一个单元的集中质量矩阵就只有一个未知元素 p.

空心管有限元模型的特征方程为:

$$[K]\{X\}_j=\lambda_j[M]\{X\}_j \tag{3}$$

其中,λ_j 和$\{X\}_j$ 是指第j 阶特征值和特征向量.

空心直管有限元模型的结构如图 1 所示,其中:$1-n+1$ 代表节点号,①、②代表局部座标号,$B_i(i=1,\cdots n)$代表梁单元的编号.

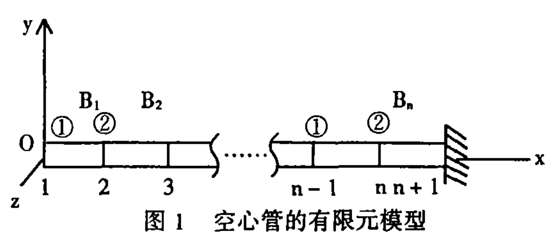

图 1　空心管的有限元模型

收稿日期:2002-09-24

作者简介:包忠有(1950-),男,江西广丰人,华东交通大学副教授.

根据图1的单元装配形式及约束状态,总刚度矩阵是块状结称三对角矩阵,特征方程可写成以如下形式:

$$\begin{bmatrix} [k_{B1}]_{11}[k_{B1}]_{12} & & & & & \\ [k_{B2}]_{21} & \cdot & \cdot & & & O \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & [k_{B_{i-1}}]_{21}[k_{B_{i-1}}]_{22}+[k_{Bi}]_{11}[k_{Bi}]_{12} & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & & & \cdot & \cdot & \cdot[k_{B_{n-1}}]_{12} \\ & & & & [k_{B_{n-1}}]_{21}[k_{B_{n-1}}]_{22}+[k_{B_n}]_1 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{x})_1 \\ \underset{\sim}{x}_2 \\ \cdot \\ \underset{\sim}{x}_i \\ \underset{\sim}{x}_n \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} [m_{B1}]_{11}\underset{\sim}{x}_1 \\ \vdots \\ ([m_{B_{i-1}}]_{22}+[m_{Bi}]_{11})\underset{\sim}{x}_i \\ \vdots \\ ([m_{B_{n-1}}]_{22}+[m_{B_n}]_{11})\underset{\sim}{x}_n \end{bmatrix}_i$$

其中:$\underset{\sim}{x}=(x_i,y_i,\psi_i)^T$

比较方程式的两边,有关系式:

$$[K_{B_{i-1}}]_{21}\underset{\sim}{x}_{i-1j}+([k_{B_{i-1}}]_{22}+[k_{Bi}]_{11})\underset{\sim}{x}_{1j}$$
$$+[k_{Bi}]_{12}\underset{\sim}{x}_{i+1j}=\lambda_i([m_{Bi}-1]_{22}+[m_{Bi}]_{11})\underset{\sim}{x}_{ij}$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

$$[k_{B0}]=0,[m_{B0}]=0,\underset{\sim}{x}_{n+1}=0 \tag{6}$$

将(1)、(2)两式代入(5)式和(6)式,有

$$e_{i-1}([k'_{B_{i-1}}]_{21}\underset{\sim}{x}_{i-1j}+[k'_{B_{i-1}}]_{22}\underset{\sim}{x}_{1j})+g_{i-1}([k_{Bi-1}]_{21}\underset{\sim}{x}_{i-1j}+[k''_{B_{i-1}}]_{22}\underset{\sim}{x}_{ij})+e_i([k'_{Bi}]_{11}\underset{\sim}{x}_{ij}+[k'_{Bi}]_{12}\underset{\sim}{x}_{i+1j}+g_i([k''_{Bi}]_{11}\underset{\sim}{x}_{ij}+[k''_{Bi}]_{12}\underset{\sim}{x}_{i+1j})=p_{i-1}\lambda_i[m'_{B_{i-1}}]_{22}\underset{\sim}{x}_{ij}+p_i\lambda_i[m'_{Bi}]_{11}\underset{\sim}{x}_{ij}$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

$$[k'_{B0}]=0,[k''_{B0}]=0,[m'_{B0}]=0,\underset{\sim}{x}_{n+1}=0$$

根据(7)式,取 $i=1,2,\cdots,n$,并将诸式联立表成矩阵形式可得逆特征方程,

$$[A]_i\{Y\}=\{0\} \tag{8}$$

其中:①$\{Y\}=(e_1,e_2,\cdots,e_n,g_1,g_2,\cdots,g_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)^T$

②$[A]_j$ 的维数是 $3n\times 3n$,j 表示与第 j 阶特征数据有关.

(8)式是齐次方程没有唯一解.若想有唯一解,必须给出相应的约束条件,化齐次方程为非剂次方程.在很多情况下,无法得到某一阶非常准确的特征数据,但可以获得若干阶近似特征数据,即 $j=j_1,j_2,\cdots,j_k$ 将其中与约束条件联立,有

$$[\bar{A}]\{Y\}=\{B\} \tag{9}$$

其中:$\{Y\}=(e_1,e_2,\cdots,e_n,g_1,g_2,\cdots,g_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)^T$

对非齐次方程而方有合理解的条件是

$$\text{系数矩阵的秩}=3n \tag{10}$$

所谓合理解意味着,解代表的是物理上可实现的结构参数,而条件(10)实际上是必要条件.

求(9)式的最小二乘解,可得近似满足具有这些特征数据和相应条件的结构参数.

3 算　例

若空心直管的低阶固有频率恰好与机身的固有频率相吻合,运动过程中将引起较强烈的振动.为了降低振动幅值延长空心直管的使用寿命,对其进行振动设计.设计分两个步骤:1)根据设计单位提供的直管的振频、振型数据,算出 M、K 并给出剖面特性,使其满足其的原有设计状态及振动特征;2)求具有新的特征数据的空心真管的剖面特性.新的特征数据必须满足两个条件:①振型的幅值不大于原有的水平.②固有频订比原有的高5 Hz左右.

由于我们所关心的空心管的低阶固有特性,所以纵向振动可以忽略不计.另外,假设空心管的重量保持不变.并根据图纸要求将梁分为16段,即 $n=16$.(见图1).这样逆特征方程就变为:

$$[\bar{A}]\{y\}=\{b\} \tag{11}$$

其中:①$\{y\}=(I_1,I_2,\cdots,I_{16})^T$,$I$—是剖面的惯性矩.

②$\{b\}$是节点质量构成的向量.

表1　剖面惯性矩

梁号	原始数据I	计算结果I	
		$m=1$	$m=4$
1	0.8280×10^0	0.7950×10^0	0.8280×10^0
2	0.3097×10^1	0.2964×10^1	0.3097×10^1
3	0.1045×10^2	0.1028×10^1	0.1045×10^2
4	0.1576×10^2	0.1558×10^2	0.1576×10^2
5	0.1890×10^2	0.1860×10^2	0.1890×10^2
6	0.2223×10^2	0.2189×10^2	0.2223×10^2
7	0.2578×10^2	0.2543×10^2	0.2578×10^2
8	0.2954×10^2	0.2915×10^2	0.2954×10^2
9	0.33353×10^2	0.3309×10^2	0.3353×10^2
10	0.3775×10^2	0.3727×10^2	0.3775×10^2
11	0.4223×10^2	0.4173×10^2	0.4226×10^2
12	0.4695×10^2	0.4635×10^2	0.4695×10^2
13	0.5240×10^2	0.5173×10^2	0.5240×10^2
14	0.5240×10^2	0.5173×10^2	0.5240×10^2
15	0.5240×10^2	0.5173×10^2	0.5240×10^2
16	0.5240×10^2	0.5173×10^2	0.5240×10^2

根据设计单位提供的振频、振型(共四阶)及有关数据,代入(11)式计算剖面特性.表1分别给出利

用一阶($m=1$)和四阶($m=4$)特征数据所得到的结果.

从上表可以看出:结果是很好的,既使 $m=1$ 时,最大误差小于 2% .由于得到特征数据常常不精确,因此我们考察随机误差的影响,对特征值和特征向量分别给出不同程度的随机误差,并利用不同阶数的特征数据,观察对剖面特性(惯性矩)的影响.结果见表 2.

表 2 参数误差分析

利用的阶数	特征值上的随机误差	特征向量上的随机误差	惯性矩的最大误差
1	0.1%	0.1%	不合理
1	20%	0.01%	51%
2	20%	0.01%	5.9%
2	20%	0.1%	不合理
4	50%	0.5%	51.0%
4	10%	0.8%	不合理

上表的数据表明:剖面特性对特性向量敏感性比对特性值更强.

作为问题的第二步,假设特征向量的数据不变,即振型的幅值不变,对特征值进行摄动使之满足设计要求.结果见表 3.

表 3 振动频率对比

阶 次	原有的频率 Hz	摄动的频率 Hz
1	8.07	13.99
2	38.45	42.98
3	99.77	104.4
4	184.3	188.8

根据新的特征数据,从振动观点出发设计了一种新的空心管的剖面特征(见表 4).

比较表 4 和表 1,结果表明,在保持重量及振型不变的条件下,只要剖面特性(惯性矩)发生较小的变化就会引起固有频率发生较大的变化.反过来说就是固有频率对剖面特性很敏感.

表 4 剖面惯性矩

梁号	惯性矩 I	梁号	惯性矩 I	梁号	惯性矩 I	梁号	惯性矩 I
1	1.8726×10^0	2	0.3264×10^1	3	0.1101×10^2	4	0.1661×10^2
5	0.1992×10^0	6	0.2343×10^2	7	0.2717×10^2	8	0.3113×10^2
9	0.3534×10^2	10	0.3979×10^2	11	0.4454×10^2	12	0.4948×10^2
13	0.5523×10^2	14	0.5523×10^2	15	0.5523×10^2	16	0.5523×10^2

4 结 论

上面利用把空心管的振动设计问题化为直梁有限元模型特征值反问题的方法,讨论了梁的特征值反问题并给出相应的解法.作为特征值反问题,它的背景有三个方面:1) 振动设计;2) 物理参数识别;3) 结构修改.因此本方法也适用于直梁结构的后两个问题.

参考文献:

[1] Hochstadt, H:On Some Inverse. Problems in Matrix Theory, Archir der Mathematik ⅩⅪⅫ,P201-207,1967.

[2] Hochstadt, H: On the construction of a Jacobi Matrix from Mixed Gigen Data, Linear Algebra and its Applications 28, P113-115,1979.

[3] de Boor, C and Golub, G.H: The Numerically stable Reconstruction of a Jacobi Matrix from Spectral Data, Linear Algebra and its Applocations 21, P245-260, 1978.

Inverse Eigenvalue Problem for Beam and Vibration Design

BAO Zhong-you

(School of Civil and Arch., East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

Abstract: On the basis of the characters of finite element model, the K、M in equation $KX=\lambda MX$ can be expressed as the functions of some structural parameters, that is, $K=K(p_1,p_2,\cdots,p_m)$, $M=M(q_1,q_2,\cdots,q_n)$. Then the inverse Eigen Equation was derived in which the unknown data are structural parameters. The stability and the condition of solution and the sensitivity of the structural parameters to eigen data a were analysed.

Key words: beam; invese eigenvalue problem; vibration design