

无背索斜塔斜拉桥的稳定性分析

宋旭明, 兰辉萍

(中南大学铁道校区 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:以长沙市洪山大桥为工程背景,采用每个单元有 14 个自由度的梁段单元,根据薄壁杆件力学及势能驻值原理推导了其单元刚度矩阵,并对无背索斜塔斜拉桥主梁的稳定性进行了分析。

关键词:梁段单元;斜拉桥;稳定性

中图分类号:O322

文献标识码:A

1 前言

长沙市洪山大桥座落于洪山庙休闲度假区,是北二环线上的一座特大桥(图 1)。该桥为一无背索的斜拉桥,桥全宽 33.2 m,主跨 206 m,其跨径在同类型桥梁中位居前列。主跨主梁是一条 4.4 m(高)×7.0 m(宽)的矩形闭口大悬臂钢脊骨梁,主梁两侧的悬臂挑梁长达 13.0 m。由于没有背索并且挑梁很长,主梁承受的轴压力、扭矩比一般的斜拉桥更大,因此在压弯扭共同作用下主梁的稳定性也就很突出。本文利用梁段

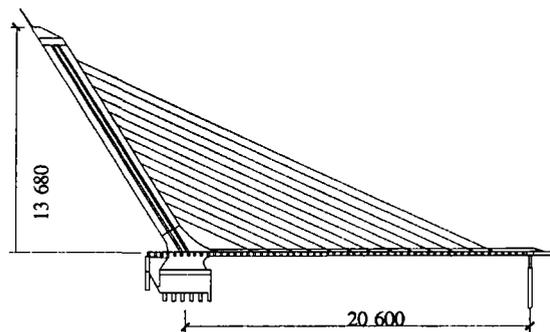


图 1 洪山大桥立面图

有限元法,以薄壁杆件理论为基础,根据能量原理求得单元刚度矩阵和总体刚度矩阵,进而得到结构的临界荷载。本文所用方法概念清楚,简单易行,可供同类型结构计算提供参考。

2 梁段单元法的建立

2.1 单元位移函数的建立

一般薄壁杆件空间单元,包括轴向位移 $u(x)$,两个方向的横向弯曲位移 $v(x)$ 、 $w(x)$ 和绕 x 轴的扭转位移 $\theta(x)$ 。端点位移共 14 个^[1],为:

$$\{\Delta\}^e = [\{\Delta_u\}^e \quad \{\Delta_v\}^e \quad \{\Delta_w\}^e \quad \{\Delta_\theta\}^e]^T$$
$$= [u_i \quad u_j \quad v_i \quad v'_i \quad v_j \quad v'_j \quad w_i \quad w'_i \quad w_j \quad w'_j \quad \theta_i \quad \theta'_i \quad \theta_j \quad \theta'_j]^T$$

相应的杆端力为:

$$\{F\}^e = [P_i \quad P_j \quad Q_{yi} \quad M_{xi} \quad Q_{yj} \quad M_{yj} \quad Q_{zi} \quad M_{zi} \quad Q_{zj} \quad M_{zj} \quad M_{xi} \quad B_i \quad M_{yj} \quad B_j]^T$$

其中: P 为轴力; Q_y 、 Q_z 为沿 y 轴、 z 轴方向的剪力; M_y 、 M_z 为绕 y 轴、 z 轴的弯矩; M_x 为扭矩; B 为扭转双力

收稿日期:2002 - 12 - 08

作者简介:宋旭明(1974 -),男,湖南醴陵人,中南大学在读硕士生。

矩.

轴向位移采用直线式位移函数,即

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

其中 a_1, a_2 为待定常数. 根据端点位移条件可求得轴向位移:

$$u(x) = [U_1(x) \quad U_2(x)] \{\Delta_u\}^e = [U(x)] \{\Delta_u\}^e$$

式中: $U_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$; $U_2(x) = \frac{x}{L}$.

沿 y 轴方向的横向弯曲位移 $v(x)$ 取三次式位移函数,即

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

其中的待定系数同样根据端点位移条件来确定. 写成矩阵形式:

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \{\Delta_v\}^e = [N(x)] \{\Delta_v\}^e$$

式中: $N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}$; $N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$;

$N_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$; $N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$;

沿 z 轴方向的横向弯曲位移 $w(x)$ 和绕 x 轴的扭转位移 $\theta(x)$ 同样取三次式位移函数, 根据上面的分析, 可以得到 $w(x)$ 和 $\theta(x)$ 的表达式:

$$w(x) = [N(x)] \{\Delta_w\}^e \quad \theta(x) = [N(x)] \{\Delta_\theta\}^e$$

综上所述, 可以得到一般薄壁杆件空间单元节点位移函数:

$$\{\Delta\}^e = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x) & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [N(x)] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [N(x)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [N(x)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_u\}^e \\ \{\Delta_v\}^e \\ \{\Delta_w\}^e \\ \{\Delta_\theta\}^e \end{Bmatrix}$$

2.2 薄壁杆稳定问题的总势能

薄壁杆件稳定问题与强度问题不同的地方是在计算应变能时必须考虑非线性应变的影响^[2].

1) 正应力应变能 U_σ

正应力包含线性部分 σ_1 和非线性部分 σ_2 , 相应的应变也包含线性部分 ϵ_1 和非线性部分 ϵ_2 .

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{B}{I_\omega} \bar{\omega} \quad \epsilon_1 = u' - v''y - w''z - \beta' \bar{\omega}$$

式中: $\beta' = \frac{1}{\mu} (\theta' - \frac{M_k}{GI_\rho})$; μ 为截面约束系数 $\mu = 1 - \frac{I_d}{I_\rho}$

非线性应变是由杆件横向位移引起的, 其表达式为:

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} [(z - z_A)^2 + (y - y_A)^2] \cdot \theta'^2 + (y - y_A) w' \theta' - (z - z_A) v' \theta'$$

式中 y_A, z_A 为以截面形心为原点时, 截面剪切中心的坐标

在计算正应力的应变能时, 略去两个非线性项的乘积, 并注意到关系式: $\sigma_1 \epsilon_2 = E \epsilon_1 \epsilon_2 = \sigma_2 \epsilon_1$, 可以得到正应力应变能:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 + \sigma_2) (\epsilon_1 + \epsilon_2) dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \epsilon_1 + 2\sigma_1 \epsilon_2) dV = \frac{1}{2} \int_L \int_A \sigma_1 (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_L [EAu'^2 + EI_y v''^2 + EI_z w''^2 + EI_\omega \beta'^2] + Pv'^2 + Pw'^2 + P \cdot r^2 \theta'^2 + M_y \beta_y \theta'^2 + M_z \beta_z \theta'^2 + B\beta_\omega \theta'^2 - 2Py_A w' \theta' + 2M_y w' \theta' + 2Pz_A v' \theta' - 2M_z v' \theta'] \cdot dx$$

式中: $r^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_A^2 + z_A^2$; $\beta_y = \frac{\int z(y^2 + z^2) dA}{I_y} - 2z_A$;

$$\beta_x = \frac{\int y(y^2 + z^2) dA}{I_x} - 2y_A; \quad \beta_{\bar{\omega}} = \frac{\int \bar{\omega}(y^2 + z^2) dA}{I_{\bar{\omega}}}$$

2) 剪切应变能 U

剪切应变能相对较小,因此在计算薄壁杆件的剪切应变能时,本文不考虑非线性剪应力的应变能,由于扭转而引起的剪应力也只计入纯扭转剪应力而忽略翘曲剪应力.由此可得到单室箱形梁的剪应力为^[4]:

$$\tau = \frac{M_t}{\Omega \cdot t} - \frac{Q_y S_z}{I_x t} - \frac{Q_z S_y}{I_y t}$$

剪切应变能

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2} \int_L [GI_d \theta'^2 + v^{-2} \beta_{x2} + w^{-2} \beta_{y2} + 2\theta' v'' \beta_x + 2\theta' w'' \beta_y + 2v'' w'' \beta_{xy}] \cdot dx$$

$$\text{式中: } \beta_{x2} = \frac{E^2}{G} \int \frac{S_z^2}{t} dx; \quad \beta_{y2} = \frac{E^2}{G} \int \frac{S_y^2}{t} ds;$$

$$\beta_x = \frac{EI_d}{\Omega} \int \frac{S_z}{t} ds; \quad \beta_y = \frac{EI_d}{\Omega} \int \frac{S_y}{t} ds.$$

3) 薄壁杆的外荷载势能 U_p

薄壁杆件单元上作用的外荷载;作用在截面剪力中心的线分布荷载 q_y, q_z ; 分别扭转 m ; 横向集中力 P_{py}, P_{pz} ; 纵向集中力 P_{px} ; 弯矩 M_{py}, M_{pz} ; 扭转 M_{px} ; 双力矩 B_p . 外荷载势能为外荷载与其相应位移乘积的负值,所以

$$U_p = - \sum_{n=1}^j \left\{ \int_L (q_y v + q_z w + m\theta) dx + (P_{py} v_p + P_{pz} w_p + P_{px} u_p + M_{py} w'_p + M_{pz} v'_p + M_{px} \theta_p + B_p \beta'_p) \right\}$$

式中 j 为单元总数.

4) 斜拉索的势能 U_l

斜拉索的拉索对主梁的作用可以简化为竖向和轴向的弹性支承. 设杆件中第 i 个节点斜拉索的竖向和轴向弹簧刚度分别为 k_{xi}, k_{zi} , 原伸长量分别为 x_{xi}, x_{zi} , 当节点竖向和轴向位移为 v_{xi} 和 u_{xi} 时,斜拉索总势能可以表示为:

$$U_l = \sum_{i=1}^m (k_{xi} x_{xi} v_{xi} + k_{zi} x_{zi} u_{xi} + \frac{1}{2} k_{xi} v_{xi}^2 + \frac{1}{2} k_{zi} u_{xi}^2)$$

式中 m 为斜拉索总数.

综上所述,薄壁杆件稳定问题的总势能为: $\Pi = U_o + U_\tau + U_p + U_l$

2.3 薄壁杆稳定问题的刚度矩阵

在建立单元位移函数并求出了薄壁杆件稳定问题的总势能之后,就可以利用势能驻值原理 $\delta \Pi = 0$, 得到薄壁杆稳定问题的单元刚度矩阵:

$$[K]^e = [K_D]^e + [K_C]^e$$

其中, $[K_D]^e$ 为单元弹性刚度矩阵; $[K_C]^e$ 为单元几何刚度矩阵.

$$[K_D]^e = \begin{bmatrix} EA[Y_{11}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & EI_x[Z_{22}] + \beta_{x2}[Z_{33}] & \beta_{yz}[Z_{33}] & \beta_x[Z_{31}] \\ [0] & \beta_{yz}[Z_{33}] & EI_y[Z_{22}] + \beta_{y2}[Z_{33}] & \beta_y[Z_{31}] \\ [0] & \beta_x[Z_{31}]^T & \beta_y[Z_{31}]^T & \frac{EI_{\bar{\omega}}}{v^2}[Z_{22}] + GI_d[Z_{11}] \end{bmatrix}$$

$$[K_C]^e = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [PZ_{11}] & [0] & Z_A[PZ_{11}] - [M_y Z_{11}] \\ [0] & [0] & [PZ_{11}] & [M_z Z_{11}] - \gamma_A[PZ_{11}] \\ [0] & Z_A[PZ_{11}] - [M_y Z_{11}] & [M_z Z_{11}] - \gamma_A[PZ_{11}] & r^2[PZ_{11}] + \beta_y[M_y Z_{11}] + \beta_z[M_z Z_{11}] + \beta_{\bar{\omega}}[BZ_{11}] \end{bmatrix}$$

$$\text{其中: } [Y_{11}] = \int_0^l [U'(x)]^T [U'(x)] dx; \quad [Z_{11}] = \int_0^l [N'(x)]^T [N'(x)] dx;$$

$$\begin{aligned}
[Z_{22}] &= \int_0^l [N'(x)]^T [N'(x)] dx; & [Z_{33}] &= \int_0^l [N''(x)]^T [N''(x)] dx; \\
[Z_{31}] &= \int_0^l [N''(x)]^T [N'(x)] dx; & [PZ_{11}] &= \int_0^l P [N'(x)]^T [N'(x)] dx; \\
[M, Z_{11}] &= \int_0^l M_y [N'(x)]^T [N'(x)] dx; & [M_z, Z_{11}] &= \int_0^l M_z [N'(x)]^T [N'(x)] dx; \\
[BZ_{11}] &= \int_0^l B [N'(x)]^T [N'(x)] dx.
\end{aligned}$$

按“对号入座”法则形成总刚后,可以先不计几何刚度矩阵求出各节点位移,然后根据节点位移函数得到结构内力进而形成几何刚度矩阵,将其代入总刚重新计算节点位移并得到新的结构内力,并用新的结构内力形成几何刚度矩阵再算,如此不断迭代,可以求得正确的内力和位移。

3 稳定特征值计算

根据上面的分析可以求得在荷载 $\{F\}$ 作用时的位移 $\{\Delta\}$,随荷载的增加,结构位移也不断增大.由于几何刚度矩阵与荷载的大小有关,因此结构的力与位移的关系不是线性的,如果 $\{F\}$ 达到 $\lambda_c \{F\}$ 时,结构呈现随遇平衡状态,这就是所求临界荷载点^[3].

设 $\{F\}$ 增加 λ 倍,则结构内力和几何刚度矩阵也增大 λ 倍,因而有

$$([K_D] + \lambda \cdot [K_G]) \cdot \{\Delta\} = \lambda \cdot \{F\}$$

如果 λ 足够大,使得结构达到随遇平衡状态,即当 $\{\Delta\}$ 变化为 $\{\Delta\} + \{\Delta_s\}$ 时,式(5-19)仍然能够成立,则

$$([K_D] + \lambda \cdot [K_G]) \cdot \{\Delta\} + \{\Delta_s\} = \lambda \cdot \{F\}$$

同时满足上述两个方程的条件是

$$([K_D] + \lambda \cdot [K_G]) \cdot \{\Delta_s\} = \{0\}$$

上式就是计算稳定特征值的特征方程式.在进行稳定特征值的计算时,必须注意荷载的选择.因为所求得的临界荷载是所选荷载的倍数,所以在计算时应确定荷载之间的相互关系,使所选择的荷载符合工程的实际设计要求。

4 洪山大桥稳定安全系数的计算

用梁段单元程序对洪山大桥的稳定安全系数进行计算时,根据截面情况,沿桥梁纵向划分为32个梁单元,单元长度为 $3 \times 9.0 + 8.0 + 27 \times 6.0 + 9.0$ 米。

本文计算了各种工况下洪山大桥的内力及位移.由于洪山大桥设计荷载为汽一超20,表1列出了在汽一超20作用下,用本文的方法计算所得的部分节点竖向位移 y 及用SAP93计算的节点竖向位移。

表1 节点竖向位移 y

节点号	1	2	9	13	17	21	25	29	33
位移 y (本文)	0	0.004	0.013	0.023	0.032	0.037	0.034	0.020	0
位移 y (SAP)	0	0.0038	0.011	0.020	0.029	0.033	0.033	0.017	0

从表1可以看出,本文所用方法和通用有限元法的计算结果吻合良好。

若在设计荷载作用下,主梁固端轴力为 N_0 ,当设计荷载增大 λ 倍而使桥梁失稳时,主梁固端轴力为 N_1 ,则稳定安全系数 k 可定义为:

$$k = \frac{N_1}{N_0}$$

梁段单元的计算结果表明,在设计荷载:汽一超20作用下,洪山大桥的稳定安全系数为3.64,与SAP的计算结果3.53吻合较好。

5 结 语

本文用节点的轴向位移、两个方向的弯曲位移、扭转位移作为位移参数,根据不同情况将各位移表示为一次或三次插值函数,形成薄壁杆件稳定问题的位移函数.根据薄壁杆件理论计算稳定的问题的各项应变能、外荷载势能、斜拉索势能,最后得到总势能.利用势能驻值原理,对总势能变分,得到稳定问题的弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵,然后进行稳定安全系数的计算.该方法简单实用,适合于同类型桥梁稳定的计算.

参考文献:

- [1] 包世华,周 坚.薄壁杆件结构力学[M].北京:中国建筑工业出版社,1991.
- [2] 郭在田.薄壁杆件的弯曲与扭转[M].北京:中国建筑工业出版社,1989.
- [3] 李国豪.桥梁结构稳定与振动[M].北京:中国铁道出版社,1992.
- [4] 宋旭明.大悬臂钢骨梁扭转效应及稳定性分析[D].中南大学硕士学位论文,2002.

An Analysis of Stability of Cable-stayed Bridge

SONG Xu-ming, LAN Hui-ping

(Civil Architecture College, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Based on the Changsha Hongshan Bridge project, this paper exploits an beam element which has fourteen displacement parameters. According to the theory of thin-walled beam and the minimum potential energy principle, the element rigidity matrix is obtained, and further analysis on stability of the main girder of the cable-stayed bridge is also given.

Key words: beam element; cable-stayed; stability