

文章编号: 1005—0523(2003)04—0001—07

与异材界面垂直相触的 I 型三维裂纹分析

陈梦成, 刘 平

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要:使用超奇异积分方程方法对相材料中与界面垂直相触的 I 型三维平片裂纹问题进行了理论和数值分析. 在理论分析中, 我们使用主部分分析法分析了界面上裂纹端部应力奇性指数和 I 型应力强度因子. 在数值计算中, 超奇异积分方程组中的未知函数裂纹表面位移差近似地表示为位移差的基本密度函数与多项式之积. 基本密度函数反映了裂纹端部应力奇性状态. 文章最后以矩形平片裂纹问题为例, 给出了若干关于不同裂纹形状比和材料刚性比时的应力强度因子数值算例. 数值结果表明, 本文提出的数值求解方法精度很高.

关 键 词:弹性体; 两相材料; 矩形裂纹; 超奇异积分方程; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

1 前 言

在纤维强化材料、半导体电子产品、不同金属材料的结合体以及金属与陶瓷的结合体中, 都存在着很多界面. 这些结合材料的损伤往往是从界面或界面近旁开始的. 因此, 准确理解界面或近旁三维裂纹端部奇性应力场分布在工程实用上显得非常重要. 研究与异材界面相触的裂纹问题有助于我们了解和分析裂纹在界面上的裂纹剥离、反射和折射问题. 以前的研究, 大多数主要局限在二维情况^[1,2]. 1986 年和 1989 年 Keer 及其合作者^[3,4]曾先后分别对三维裂纹与异材界面垂直相触和穿透界面裂纹问题进行了研究. 然而, 由于数学和力学上的困难, 在他们的应力强度因子数值分析中, 并没有考虑裂纹端部实际的应力奇性指数和应力奇性场. 著者^[5,6]曾使用超奇异积分方程方法也对两相材料中平行于界面和垂直于界面的三维裂纹问题进行了分析.

本文继续使用超奇异积分方程方法讨论与界面垂直相触的 I 型三维平片问题. 首先, 通过主部分分析法, 我们从理论上分析裂纹端部应力奇性指数和 I 型应力强度因子表达式. 接着, 我们讨论超奇异积分方程的数值求解方法. 在数值分析过程中, 未知函数裂纹表面位移差近似地表示为位移差的基本密度函数与多项式之积. 该一做法, 曾被本文著者^[7,8]成功应用于无限大弹性均质体中三维裂纹问题. 文章最后以矩形平片裂纹为例, 讨论不同裂纹形状比和材料的刚性比对与异材界面垂直相触时界面上裂纹端部应力强度因子的影响, 并以图表的形式给出了具体数值计算结果.

2 超奇异积分方程

图 1 是两个具有不同刚性比的半无限大弹性均质体沿 $x_1 - x_3$ 平面完全接合的结合体. 假定上半空间的

材料弹性常数为 (μ_1, ν_1) , 而下半空间的材料弹性常数为 (μ_2, ν_2) . 平片裂纹 S 假设位于 $x_3=0$ 的平面, 参见图 1.

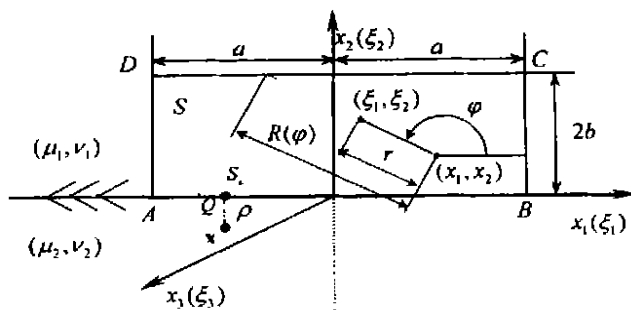


图 1 问题描述示意图

如果结合体无限远处沿垂直于裂纹面的方向受均匀拉伸载荷 σ_{33}^∞ 作用, 则根据两相材料空间中的点力基本解、Somigliana 公式、Hadamard 有限部积分概念以及裂纹面上的边界条件, 我们得到以下有关三维平片裂纹与异材界面垂直相触时的超奇异积分方程^[5]:

$$\oint_{s^+} \left[\frac{1}{r_1} + K_{33}(\mathbf{x}, \xi) \right] u_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{33}^\infty \quad (1)$$

其中 $r_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$; $u_3(\xi) = u_3^+(\xi) - u_3^-(\xi)$; S^+ 为矩形平片裂纹上表面面积, 即: $S^+ = \{(\xi_1, \xi_2) | (-a \leq \xi_1 \leq a, 0 \leq \xi_2 \leq 2b)\}$; $\oint$ 意旨 Hadamard 有限部积分; Kernel 函数 $K_{33}(\mathbf{x}, \xi)$ 为

$$K_{33}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{2S(\kappa_1 + 1) - 3A(\kappa_1^2 - 2\kappa_1 + 3)}{2r_2^3} + \frac{3A[12x_2\xi_2 - (3 - \kappa_1)(\kappa_1 - 1)(x_2 + \xi_2)^2]}{2r_2^5} \\ + \frac{3[A\kappa_1(\kappa_1 + 2) + B - 2S(\kappa_1 + 1)]}{2r_2 r_4^2} \quad (2)$$

其中

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}, r_4 = r_2 + x_2 + \xi_2, \kappa_1 = 3 - 4\nu_1$$

$$A = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \kappa_1 \mu_2), B = (\kappa_2 \mu_1 - \kappa_1 \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2 \mu_1), S = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$$

3 界面上裂纹端部应力奇性指数

应力奇性指数在评价裂纹端部奇性应力场和应力强度因子中有着非常重要的作用. 由于界面上裂纹端部角点 A 和 B (参见图 1) 的应力奇性分析的复杂性, 我们这里只对裂纹端部 ($\overline{AB}$) 除去这两个角点以外的应力奇性指数进行分析. 根据弹性理论, S_ϵ 邻域内的位移可表示如下:

$$u_3(\xi) = C(Q) \xi_2^\lambda, 0 < \text{Re} \lambda < 1 \quad (3)$$

其中 λ 为未知的应力奇性指数, 而 $C(Q)$ 是取决于裂纹端部 ($\overline{AB}$) 上 Q 点位置的常数. 根据式 (3) 并使用超奇异积分方程的主部分分析方法, 我们有:

$$\lim_{\xi_\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} \frac{u_3(\xi)}{r_1} d\xi_1 d\xi_2 = -2C(Q) x_2^{\lambda-1} \lambda \pi \cot \lambda \pi \quad (4)$$

$$\lim_{\xi_\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} K_{33}(\mathbf{x}, \xi) u_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2 = 2C(Q) x_2^{\lambda-1} (A + B - 4A\lambda^2) \frac{\lambda \pi}{\sin \lambda \pi} \quad (5)$$

将式 (4) 和 (5) 代入式 (1), 为确保在求极限的过程中 S_ϵ 邻域内方程 (1) 有界和常数 $C(Q)$ 不为零, 我们得到以下有关 λ 的特征方程:

$$2 \cos \lambda \pi + 4A\lambda^2 - A - B = 0 \quad (6)$$

特征根 λ 决定了界面上裂纹端部的应力奇异性,它取决于 (μ_1, κ_1) 和 (μ_2, κ_2) .表 1 中给出了不同材料组合时的 λ 值.从表中值可以看出,除特殊情况 μ_2/μ_1 为零时界面上裂纹端部应力具有非奇异性外,其它情况应力均具有奇异性,即 $-1<\lambda<0$,而且随 μ_2/μ_1 的减少,这种奇异性减弱.应当指出的是,不管 μ_2/μ_1 如何变,我们只得到唯一的奇异性实根.

表 1 不同材料组合时方程(6)的特征根

$\frac{v_2=v_1=0.30}{\mu_2/\mu_1}$	λ	$\frac{v_1=0.35, v_2=0.30}{\mu_2/\mu_1}$	λ
∞	-0.71116780946470	∞	-0.67969081103799
1000	-0.71066144395289	1000	-0.67925728224361
100	-0.70613485781618	100	-0.67537681117056
44.44	-0.70006648812526	46.15	-0.67050232624958
22.22	-0.68973683880520	23.07	-0.66188163498664
10	-0.66722658360383	10	-0.64165088809933
1.02	-0.50202267953188	1.02	-0.49056227068437
1	-0.50000000000000	1	-0.48862937167960
0.98	-0.49792946795624	0.98	-0.48664877741285
0.1	-0.24639989309745	0.1	-0.23917235988078
0.045	-0.17419366663813	0.043	-0.16501915246489
0.023	-0.12740689960167	0.022	-0.12043977034579
0.01	-0.08519490567154	0.01	-0.08217234139696
0.001	-0.02721022027896	0.001	-0.02622292880765
0	0	0	

4 界面上裂纹端部 I 型应力强度因子

如图 1 所示,因裂纹扰动在下半空间材料 2 中裂纹平面内 x 点(见图 1)引起的沿 x_3 方向应力场具有下面积分形式^[6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\mathbf{x}) = & \frac{\mu_2}{2\pi(\kappa_2+1)} \int_{s^+} \left\{ \frac{(\kappa_2+1) - (\kappa_1-1) + \overline{A}(\kappa_1+3) + \overline{B}(\kappa_2-3) + 2S(\kappa_2+1)}{r_1^3} \right. \\ & - \frac{3[(\kappa_2+1) - (\kappa_1+1) + \overline{A}(\kappa_1+2) + \overline{B}\kappa_2 + 2S(\kappa_2+1)]}{r_1(r_1+x_2-\xi_2)^2} - 6(\overline{B}-\overline{A})\xi_2 \\ & \left. \left[\frac{1}{r_1^2(r_1+x_2-\xi_2)^2} + \frac{1}{r_1^3(r_1+x_2-\xi_2)} \right] \right\} u_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\overline{A}=(\kappa_1\mu_2-\kappa_2\mu_1)/(\mu_1+\kappa_1\mu_2)$, $\overline{B}=(\mu_2-\mu_1)/(\mu_2+\kappa_2\mu_1)$.

把式(3)代入式(7)并使用超奇异积分方程的主部分分析方法,得到下面表达式:

$$\sigma_{33}(0, \rho, 0) = \frac{\mu_2 \lambda [2 - \overline{A} - \overline{B} - 2\lambda(\overline{A} - \overline{B})]}{(\kappa_2+1)\sin \lambda \pi} \cdot C(Q) \rho^{\lambda-1} \tag{8}$$

因此,界面上裂纹端部 $(\overline{AB})$ I 型应力强度因子如下:

$$K_{1, \lambda}(Q) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2} \rho^{1-\lambda} \sigma_{33}(0, \rho, 0) = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \mu_2 \lambda [2 - \overline{A} - \overline{B} - 2\lambda(\overline{A} - \overline{B})] u_3(\xi_1, \xi_2)}{(\kappa_2+1)\sin \lambda \pi \xi_2^\lambda} \tag{9}$$

5 超奇异积分方程的数值求解方法

中国知网 <https://www.cnki.net>
一般来讲,要获得方程(1)的解析解是不可能的,而必须求助于数值解.以往的数值解法是常使用边界元

方法^[9,10,11].在边界元方法中,超奇异积分方程中的未知函数裂纹表面位移差采用线性插值,最后确定应力强度因子的时候又必须利用外插,这无疑降低了该方法的数值结果精度.本文著者曾经提出了超奇异积分方程的高精度数值解法^[7].对本文所研究的矩形平片裂纹而言,未知函数裂纹表面位移差 $u_3(\xi_1, \xi_2)$ 可以用下列形式来近似:

$$u_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^\lambda \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} \times F(\xi_1, \xi_2) = \omega(\xi_1, \xi_2) \times F(\xi_1, \xi_2) \quad (10)$$

其中 $\omega(\xi_1, \xi_2)$ 是位移差基本密度函数,它反映了裂纹端部应力奇异现象.未知权函数 $F(\xi_1, \xi_2)$ 可近似地表示为

$$F_{mn}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \xi_1^m \xi_2^n \quad (11)$$

其中 a_{mn} 为待定常数.将式(10)和(11)代入式(1),我们就得到如下一组以 a_{mn} 为未知数的线性代数方程:

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} I_{mn}(x_1, x_2) = -\frac{\pi(\kappa_1 + 1)}{\mu_1} \sigma_{33}^\infty \quad (12)$$

这里

$$I_{mn}^1(x_1, x_2) = \oint_{s^+} \frac{1}{r_1} \xi_1^m \xi_2^{n+\lambda} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (13)$$

$$I_{mn}^2(x_1, x_2) = \int_{s^+} K_{33}(\mathbf{x}, \xi) \xi_1^m \xi_2^{n+\lambda} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (14)$$

式(14)是非奇异积分,可以采用二维普通的 Gauss 积分公式进行数值求解.式(13)则是一个超超奇异积分,它可以按以下方式处理:

$$I_{mn}^1(x_1, x_2) = \oint_{s^+} \frac{1}{r_1} \xi_1^m \xi_2^{n+\lambda} \sqrt{(a^2 - \xi_1^2)(2b - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \oint_{s^+} \frac{G_{mn}(\xi_1, \xi_2)}{r_1} d\xi_1 d\xi_2 \quad (15)$$

显然式(15)中的函数 $G_{mn}(\xi_1, \xi_2)$ 是二次可微的,因此将它在 x 点邻域展成 Taylor 级数,并取前三项,即:

$$G_{mn}(\xi_1, \xi_2) = G_{mn}(x_1, x_2) + G_{mn,\alpha}(\mathbf{x}, \xi) + G_{mn,\beta}(\mathbf{x}, \xi) \quad (16)$$

其中

$$G_{mn}(\xi_1, \xi_2) = G_{mn}(x_1, x_2) + (\xi_\alpha - x_\alpha) G_{mn,\alpha}(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) G_{mn,\alpha\beta}(x_1, x_2) \quad (17)$$

$$G_{mn,\alpha}(\mathbf{x}, \xi) = G_{mn}(\xi_1, \xi_2) - G_{mn}(x_1, x_2) \quad (18)$$

式中 $\alpha, \beta=1, 2$; 逗号后指标表示 $G_{mn}(\xi_1, \xi_2)$ 分别对 ξ_1 或 ξ_2 进行微分.将式(17)代入式(16),然后再代入到式(15)中,因此式(15)的积分可写为

$$I_{mn}^{1s}(x_1, x_2) = I_{mn}^{1s}(x_1, x_2) + I_{mn}^{1o}(x_1, x_2) \quad (19)$$

其中 I_{mn}^{1s} 为超奇异积分; I_{mn}^{1o} 是非奇异积分,可用二维普通的 Gauss 数值积分公式得到. I_{mn}^{1s} 和 I_{mn}^{1o} 分别表示为:

$$I_{mn}^{1s} = G_{mn}(x_1, x_2) \oint_{s^+} \frac{1}{r} d\xi_1 d\xi_2 + G_{mn,\alpha}(x_1, x_2) \oint_{s^+} \frac{(\xi_\alpha - x_\alpha)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2} G_{mn,\alpha\beta}(x_1, x_2) \oint_{s^+} \frac{(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 \quad (20)$$

$$I_{mn}^{1o} = \int_{s^+} \frac{G_{mn,\alpha}(\mathbf{x}, \xi)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 \quad (21)$$

使用极坐标 $\xi_1 - x_1 = r \cos \varphi$ 和 $\xi_2 - x_2 = r \sin \varphi$ (参看图 1), 根据 Hadamard 有限部积分概念, 我们有

$$\oint_{s^+} \frac{1}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{R(\varphi)} d\varphi \quad (22)$$

$$\oint_{s^+} \frac{(\xi_\alpha - x_\alpha)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^{2\pi} (\delta_{\alpha 1} \cos \varphi + \delta_{\alpha 2} \sin \varphi) \ln R(\varphi) d\varphi \quad (23)$$

$$\oint_{s^+} \frac{(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^{2\pi} (\delta_{\alpha 1} \cos \varphi + \delta_{\alpha 2} \sin \varphi)(\delta_{\beta 1} \cos \varphi + \delta_{\beta 2} \sin \varphi) R(\varphi) d\varphi \quad (24)$$

中国知网 <https://www.cnki.net>
其中 $R(\varphi)$ 如图 1 所示. 式(22)~(24)表明, 式(20)的超奇异积分可以通过一维普通 Gauss 数值积分公式来

获得.至此,使用式(20)和(21)的积分,式(13)的超奇异积分获得数值解决.

利用式(9)和(10),我们得到如下关于计算界面上矩形平片裂纹端部(AB)应力强度因子的表达式:

$$K_{1,\lambda}=\frac{\sqrt{2\mu_2\lambda}[2-\overline{A}-\overline{B}-2\lambda(\overline{A}-\overline{B})]}{(\kappa_2+1)\sin(\lambda\pi)}\sqrt{2b(a^2-x_1^2)}F(x_1,0),-a\leq x_1\leq a$$

(25)

6 数值计算结果和讨论

6.1 应力强度因子无量纲化表示

我们基于上面所讨论的数值方法,编制了相应的计算线性代数方程组(12)中未知系数 α_{nm} 的程序,由此系数即可确定椭圆平片裂纹问题的应力强度因子 $K_{1,\lambda}$.为了比较上的便利,将它们进行无量纲化,即:

$$F_{1,\lambda}=\frac{K_{1,\lambda}}{\sigma_{33}^\infty b^{1-\lambda}}$$

(26)

在数值计算中,我们通过 $x_1=a\xi_1$ 和 $x_2=2b\xi_2$ 变换将物理平面上的矩形平片裂纹映射到投影平面上为 2×1 的矩形平片裂纹,请参见图 2.物理平面上的边界配置点的选择分布如图 2(b)所示的 2×1 矩形内的网格节点.在所有的计算例中,配置点数的选择除特别声明外都是采用 2×1 矩形内 20×20 的网格节点数.

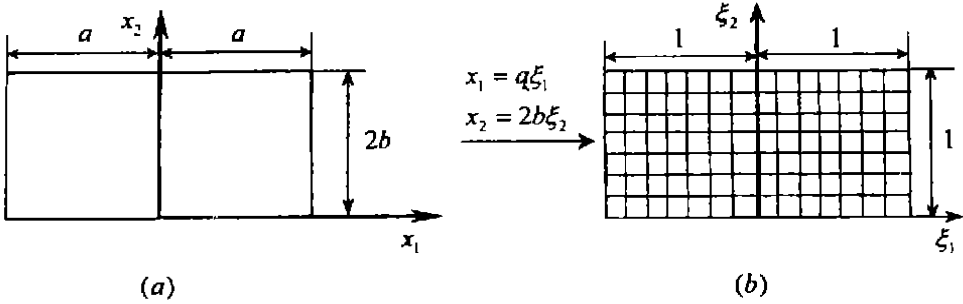


图 2 (a)矩形平片裂纹 (b)边界配置点

6.2 数值结果的收敛性讨论

我们通过改变多项式的次数,探讨了矩形平片裂纹与异材界面相触时界面上裂纹端部(AB)应力强度因子 $F_{1,\lambda}$ 的收敛性情况.计算结果分别如图 3 和表 1 所示.图 3 是反映了当裂纹的形状比为 $a/b=1$ 和材料弹性常数为 $\mu_2/\mu_1=2,v_1=v_2=0.3$ 时,多项式次数的选择对裂纹表面边界条件 $\sigma_{33}=0$ 收敛的影响,从图中可以看出,随着多项式次数的提高,本文数值计算结果收敛于 $\sigma_{33}=0$ 的理论裂纹表面边界条件.表 2 是裂纹的形状比为 $a/b=1$ 和材料弹性常数为 $\mu_2/\mu_1=1,v_1=v_2=0.3$ 的场合下,选取不同的多项式次数时的本文数值结果与著者及其合作者^[8]以前计算结果收敛对照表.表中结果也表明,随着多项式次数的提高,本文数值计算结果收敛于现有解.

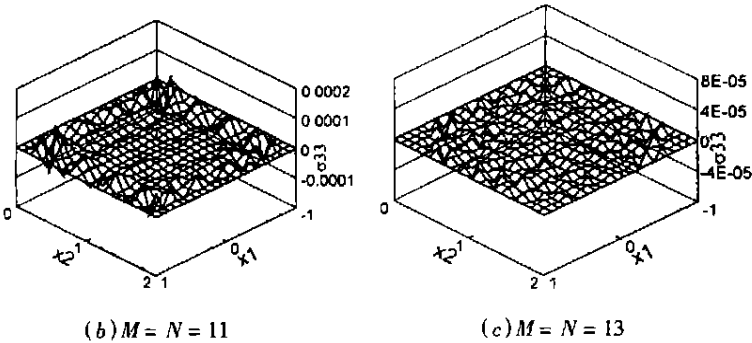


图 3 选择不同的多项式次数时裂纹面上应力边界条件 $\sigma_{33}=0$ 收敛情况

表 2 无限大弹性均质体中三维正方形平片裂纹端部应力强度因子 $F_{1,\lambda}(\lambda=0.5)$ 数值解与现有解^[8] 比较

x_1/a (M, N)	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
7	0.7531	0.7514	0.7462	0.7379	0.7250	0.7070	0.6830	0.6513	0.6095	0.5502	0.4486
8	0.7533	0.7516	0.7463	0.7377	0.7248	0.7068	0.6829	0.6512	0.6090	0.5501	0.4495
9	0.7533	0.7516	0.7463	0.7376	0.7247	0.7067	0.6829	0.6512	0.6090	0.5501	0.4506
10	0.7534	0.7517	0.7465	0.7376	0.7246	0.7066	0.6827	0.6510	0.6088	0.5497	0.4515
$Wang^{[8]}$	0.7534	0.7517	0.7465	0.7376	0.7245	0.7066	0.6828	0.6512	0.6086	0.5492	0.4536

6.3 与异材界面垂直相触时矩形平片裂纹界面端部应力强度因子分析

以下我们就矩形平片裂纹与两相材料界面相触时材料的刚性比对界面上裂纹端部的应力强度因子影响进行讨论和分析. 图 4 给出了界面上裂纹端部(AB)最大应力强度因子 $F_{1,\lambda}(x_1=0, x_2=0)$ 与材料的刚性比关系. 图中曲线表明, 界面上裂纹端部(AB)应力强度因子是随着材料的刚性比增大而增大, 但当 $\mu_2/\mu_1 \leq 0.01$ 和 $\mu_2/\mu_1 \leq 100$ 时, 这种变化趋势开始变得平缓. 图 5 描绘了材料刚性比 $M_2/M_1=2$ 时界面上裂纹端部(AB)应力强度因子 $F_{1,\lambda}$ 的变化情况. 综观图 4 和 5, 我们都可以看出, 不论材料的刚性比如何, 裂纹的形状比越大, 即裂纹越窄长, 裂纹端部应力强度因子总是越大. 而且, 随着 $a/b \rightarrow \infty$, 应力强度因子趋近平面情况下裂纹问题的应力强度因子.

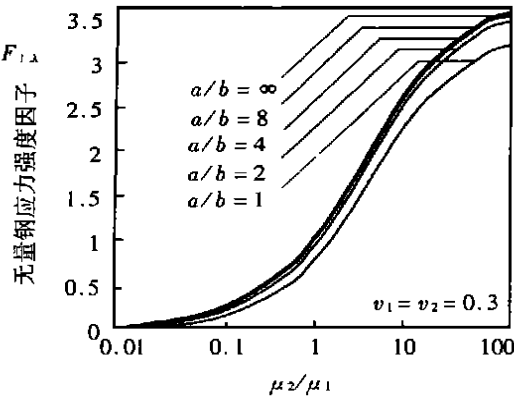


图 4 界面上裂纹前沿的最大应力强度因子 $F_{1,\lambda}$ ($x_1=0, x_2=0$) 与材料刚性比关系

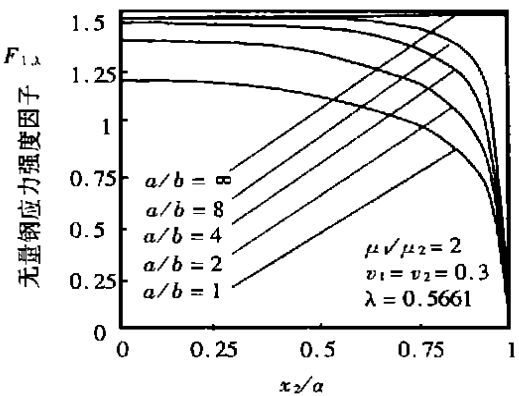


图 5 μ_2/μ_1 时界面上裂纹前沿应力强度因子 $F_{1,\lambda}$

7 结束语

本文使用超奇异积分方程方法研究了与两相材料界面相触的三维矩形平片裂纹问题. 在数值求解超奇异积分方程的过程中, 未知函数被近似表示为裂纹位移差基本密度函数与多项式的乘积. 经与现有解比较, 证实本文的数值解法精度很高.

另外, 我们通过系统考察分析与界面相触的三维矩形平片裂纹问题, 界面上裂纹端部(AB)应力强度因子则随着材料的刚性比增大而增大, 当 $\mu_2/\mu_1 \leq 0.01$ 和 $\mu_2/\mu_1 \geq 100$ 时, 这种变化趋势开始变得平缓; 不论材料的刚性比如何, 裂纹的形状比 a/b 越大, 即裂纹越窄长, 裂纹端部应力强度因子总是越大. 而且, 随着 $a/b \rightarrow \infty$, 应力强度因子趋近平面情况下裂纹问题的应力强度因子.

参考文献:

[1] Erdogan F, Aksogan O. Bonded half-planes containing an arbitrarily oriented crack. Int J Solids Structures, 1976, 10: 569~585.
[2] 陈玳珩, 西谷 弘信. 异材界面に接触するき裂の最大係数の解析. 机论, 1993, A, 59: 47~53
[3] Lee J C, Keer L M. Study of a three-dimensional crack terminating an interface. ASME J Appl Mech, 1986, 53: 311~316.
[4] Hanson M J, Lin W, Keer L M. Three-dimensional analysis of cracking through the boundary of a two-phase Material. ASME J Appl Mech, 1989, 56: 850~857.

- [5] Chen M C. 3D Elastic fundamental solutions of bimaterial and their applications to 3D crack problems. 日本机械学会, 机讲论, 平成 10 年(1998), A, 45~46.
- [6] Chen M C, Noda N A. A hypersingular integral equation method of a 3D planar crack vertically terminating at an interface of bimaterial and its theoretical analysis. 日本机械学会, 机讲论, 平成 10 年(1998), B, 97~98.
- [7] 陈梦成, 余荷根, 汤任基. 三维裂纹问题的高精度数值解法. 固体力学学报, 2002, 23(2): 207~211.
- [8] Wang Q, et al. Variation of stress intensity factor along the front of a 3D rectangular crack by using a singular integral equation method. Int J Fract Mech, 2001, 108, 119~131.
- [9] 陈梦成. 两相材料界面附近(含界面)三维断裂力学问题的超奇异积分方程方法. 上海交通大学博士论文, 1997.
- [10] 秦太验. 三维断裂力学的有限部积分一边界元方法研究. 上海交通大学博士论文, 1993.
- [11] 乐金朝. 三维复合材料断裂力学问题的超奇异积分方程解法. 上海交通大学博士论文, 1994.

Analysis of a Mode I 3D Crack Vertically Terminating at a Bimaterial Interface

CHEN Meng-cheng, LIU Ping

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong university, Nanchang 330013, China)

Abstract : In this paper a mode I three-dimensional planar crack vertically terminating at a bimaterial interface is theoretically and numerically analyzed with the hypersingular integral equation method. In the theoretical analysis, stress singularities and mode I stress intensity factor are derived with dominant-part analysis. In the numerical calculations, the unknown displacement difference on the crack surfaces in the hypersingular integral equation is approximated with a product of the fundamental density function and polynomials. Finally, some numerical examples of rectangular crack problems for stress intensity factors are given with different aspects of the crack shape and ratios of material constants. It is shown that present method yields solutions with high accuracies.

Key words : elasticity; bimaterial; rectangular crack; hypersingular integral equation; stress intensity factor