文章编号:1005－0523(2003)04－0106－03

关于整数集上的和图的几个新结果

徐保根[1]，刘二根[1]，肖晚秀[2]

(1.华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013;2.江西 宜春市袁州区春台中学,宜春 336000)

摘要:证明了:(1)对任意 n 阶图 G,若 $\delta(G)\geqslant(n+3)/2$,则 G 不是整和图.(2)所有的 2－正则图(除 C_4 外)均为整和图.这一结果推广了文[1,2]中的结论.

关 键 词:整和图;整和数;正则图;圈

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

1　引言及引理

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[3,4].

定义 1[3]　设 $G=(V, E)$为一个 n 阶图.若存在某个 n 元整数集 S 及一个 1－1 映射 $f:V\to S$,使得 $uv\in E$ 当且仅当 $f(u)+f(v)\in S$.则称 G 为一个整数集上的和图,简称整和图(Integral sum graph).且 f 称为 G 的一个整和标号函数.此时,记 $G\cong G^+(S)$,且称 $\zeta(G)=\min\{m\in N_0 \mid G\cup mK_1$ 为整和图$\}$为 G 的整和数,这里 N_0 为全体非负整数集.显然,一个图 G 为整和图当且仅当 $\zeta(G)=0$.

确定一个给定图的整和数是困难的.目前,除完全图、完全二部图、圈、轮和毛虫树外,其余图类尚不知其整和数.当然,判断一个图是否为整和图是困难且有趣的.文[3、4]中都证明了所有圈 $C_n(n\neq4)$均为整和图.推广这一结果,本文将证明所有的 2－正则图 $G(G\neq C_4)$均为整和图.其次,我们也证明了:当 $\delta(G)\geqslant(n+3)/2$ 时,则 n 阶图 G 不是整和图.下面列出几个有用的结论:

引理 1[5]　对任意自然数 m,则 m 个的并 mC_3 是一个整和图.

引理 2[5]　若 G_1 和 G_2 均为整和图,且 $\Delta(G_i)<|V(G_i)|-1(i=1,2)$,则 $G_1\cup G_2$ 是一个整和图.

引理 3[1,2]　所有的圈 C_n(除 C_4 外)均为整和图,但 C_4 不是整和图.

引理 4[5]　当 $n\geqslant4$ 时,$\zeta(K_n)=2n-3$.

2　主要结果及其证明

我们知道,所有的圈 C_n(除 C_4 外)均为整和图[1,2].推广这一结果,我们有

定理 1　设 G 为一个 2－正则图,且 $G\neq C_4$,则 G 为整和图.

证　若 G 至少有三个分支,则由引理 1～2 知 G 为整和图.若 $G=C_n(n\neq4)$,则由引理 3 知 G 为整和图.

现考虑 $G=C_m\cup C_n$,当 $\min\{m, n\}\geqslant5$ 时,由引理 1 及引理 3 知 G 为整和图.因此,我们只需要证明 $C_3\cup C_n$ 及 $C_4\cup C_n$ 均为整和图即可.

情况 1　当 $G=C_3\cup C_{2m}$时,由于 $C_3\cup C_4\cong G^+(-5,-4,-2,-1,1,2,4)$为整和图,下设 $m\geqslant3$.

记 $V(C_3)=\{c_1, c_2, c_3\}$,C_{2m}的顶点依次(按顺时针方向)记为 $u_1v_1u_2v_2u_3v_3\cdots u_mv_m$.

收稿日期:2002－08－05

作者简介:徐保根(1963－),男,江西南昌人,教授.

定义图 G 的标号函数 f 如下:

$f(c_1)=2m-2, f(c_2)=2m-1, f(c_3)=-4m+4$.

$f(u_i)=3m-3+i, f(v_i)=-m+2-i$ $(i=1,2,3,\cdots m)$.

不难验证:f 为图 G 的一个整和标号函数,因此 G 为整和图.

情况 2　当 $G=C_3\cup C_{2m+1}$ 时,由引理 1 知 $C_3\cup C_3=2C_3$ 为整和图,下设 $m\geqslant 2$. 同样记

$V(C_3)=\{c_1, c_2, c_3\}$, C_{2m+1} 的顶点依次(按顺时针方向)记为 $u_1v_1u_2v_2\cdots u_mv_mv_{m+1}$.

定义图 G 的标号函数 f 如下:

$f(c_1)=4m-2, f(c_2)=-2m$,

$f(c_3)=-2m+1$,

$f(u_i)=-4m+i \quad i=1,2,\cdots m$.

$f(v_j)=2m-j \quad j=1,2,\cdots m+1$.

不难验证:f 为图 G 的一个整和标号函数,因此 G 为整和图.

情况 3　当 $G=C_4\cup C_{2m}$ 时,由于 $C_4\cup C_4\cong G^+(-7,-5,-4,-2,1,2,4,5)$,故可设 $m\geqslant 3$. 同样地,C_4 的顶点依次(按顺时针方向)记为 $c_1c_2c_3c_4$, C_{2m} 的顶点依次(按顺时针方向)记为 $u_1v_1u_2v_2u_3v_3\cdots u_mv_m$,定义图 G 的标号函数 f 如下:

$f(c_1)=3m-3, f(c_2)=-4m+3$,

$f(c_3)=3m-4, f(c_4)=-4m+4$

$$\left.\begin{aligned} f(u_i)&=-m+2-i\\ f(v_i)&=4m-5+i\end{aligned}\right\}(1\leqslant i\leqslant m)$$

不难验证:f 为图 G 的一个整和标号函数,因此 G 为整和图.

情况 4　当 $G=C_4\cup C_{2m+1}$ 时,由情况 1 知 $C_4\cup C_3$ 为整和图,故可设 $m\geqslant 2$. 同样地,C_4 的顶点依次(按顺时针方向)记为 $c_1c_2c_3c_4$, C_{2m+1} 的顶点依次(按顺时针方向)记为 $u_1v_1u_2v_2\cdots u_mv_mv_{m+1}$. 定义图 G 的标号函数 f 如下:

$f(c_1)=m+2, f(c_2)=2m+2$,

$f(c_3)=m+1, f(c_4)=-2m-5$

$f(u_i)=3m+5-i \quad (1\leqslant i\leqslant m)$

$f(v_j)=-2m-3+j \quad (1\leqslant j\leqslant m+1)$

不难验证:f 为图 G 的一个整和标号函数,因此 G 为整和图.

综合情况 1～4,定理 1 证毕.

F. Harary[3]证明了所有 1－正则图均为整和图,现在定理 1 告诉我们:除 C_4 外,所有的 2－正则图均为整和图,而当 $k\geqslant 3$ 时,k－正则图就不一定为整和图,例如当 $n\geqslant 4$ 时,$\zeta(K_n)=2n-3\neq 0$,故 K_n 不是整和图. 一般地,我们有

定理 2　设 G 为一个 n 阶图,且其最小度 $\delta(G)\geqslant\dfrac{n+3}{2}$,则 G 不是整和图.

证　假若 G 是整和图,f 为图 G 的一个整和标号函数. 记 $S=\{f(u)\mid u\in V(G)\}$,即 $G\cong G^+(S)$. S 中的 n 个相异整数记为 $a_i(i=1,2,\cdots,s)$ 和 $b_j(j=1,2,\cdots,t)$,这里 $s+t=n$, $a_i<0(i=1,2,\cdots,s)$, $b_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,t)$. 不妨设这 n 个相异整数按大小排为:

$$a_s<a_{s-1}<a_{s-2}<a_1<b_1<b_2<\cdots\cdots b_t$$

记　$a_i=f(u_i), u_i\in V(G)(i=1,2,\cdots,s)$

$b_j=f(v_j), v_j\in V(G)(j=1,2,\cdots,t)$

情况 1　当 $t\geqslant s$ 时;即 $s\leqslant n/2$,由于 $b_j>0$, $b_t+b_j\notin S(j=2,3,\cdots,t-1)$,由整和图的定义得知,$v_t$ 点与 $v_j(j=2,3,\cdots,t-1)$ 点均不邻接,因此点的度 $d(v_t)\leqslant n-1-(t-2)=s+1\leqslant(n+2)/2$,这与 $\delta(G)\geqslant(n+3)/2$ 矛盾.

情况 2　当 $t<s$ 时;即 $t<n/2$,由于 $a_i<0$, $a_s+a_i\notin S(i=1,2,\cdots,s-1)$,由整和图的定义得知,$u_s$ 点与 $u_i(i=1,2,\cdots,s-1)$ 点均不邻接,因此,u_s 点的度 $d(u_s)\leqslant n-1-(s-1)=t<n/2$,这也与 $\delta(G)\geqslant(n+3)/2$ 矛盾.

综合情况 1～2,定理 2 证毕.

特殊地,对于正则图,我们有

定理 3　设 G 为一个 n 阶 k－正则图,若 $n\geqslant 4$ 且 $k\geqslant n/2$,则 G 不是整和图

证:由引理 3～4 知,C_4 和 $K_n(n\geqslant 4)$ 均不是整和图,因此,可设 $n\geqslant 4$ 且 $k\leqslant n-2$.

(反证)假设 G 是整和图,f 为图 G 的一个整和标号函数. 记 $S=\{f(u)\mid u\in V(G)\}$. 由于 G 为 k－正则图($k\leqslant n-2$),故 $0\notin S$(否则,标号为 0 的这个点与其余 $n-1$ 个点均邻接,矛盾). 将 S 中所有的 n 个非零整数排列为:

$$a_s<a_{s-1}<a_{s-2}<\cdots\cdots<a_1<b_1<b_2<\cdots\cdots<b_t$$

这里　$a_i=f(u_i)<0 \quad (i=1,2,\cdots s)$, $b_j=f(v_j)>0 \quad (j=1,2,\cdots t)$

记 $A=\{u_i\mid i=1,2,\cdots,s\}$, $B=\{v_j\mid j=1,2,\cdots,$

$t\}$. 不失一般性，可设 $|a_s| \geqslant b_t$（否则，将 S 中所有的 n 个整数均乘以 -1，即 $-f$ 也是图 G 的一个整和标号函数）. 显然，$a_s + a_i \notin S$，故 u_s 点与 u_i（$i=1,2,\cdots,s-1$）点均不邻接，u_s 点的邻域 $N(u_s) \subseteq B$，因此，$k \leqslant t$. 记 $N(u_s)=\{v_{j1}, v_{j2}, \cdots\cdots, v_{jk})\subseteq B$，又因为 $a_s + f(b_{ji}) \leqslant 0$，从而 $a_s + f(b_{ji}) \subseteq \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{s-1}\}$（$i=1,2,\cdots,k$），即 $k \leqslant s-1$，结合 $k \leqslant t$ 得知：$2k \leqslant s-1+t=n-1$，这与 $k \geqslant n/2$ 矛盾. 定理 3 证毕.

最后，我们提出一个问题：如何确定（估界）一个 n 阶整和图的最多边数？

参考文献：

[1] A·Sharary, Integral sum graphs from complete graphs, cycles and wheels, Arab·Gulf. J·Scient·Res. 1996, 1～14.

[2] 刘二根等，关于圈的整和数的一个注记，华东交通大学学报，1999(4)75～77.

[3] F·Harary, Sum over all integers, Discrete Math. 124(1994) 99～105.

[4] J·A·Bondy and V·S·R·Murty, Graph theory with applications, Macmillan, London and Elsevier, Amsterdam, 1976.

[5] Baogen Xu, On integral sum graphs, Discrete Math. 194 (1999) 285～294.

Sum Graphs Over the Integral Set

XU Bao-gen, LIU Er-gen, XIAO Wan-xiu

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ. Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper mainly proves the following results: 1) let G be a graph of order n, if $\delta(G) \geqslant (n+3)/2$, then G is not integral sum graph. 2) all 2-regular graphs with the exception of C_4 are integral sum graphs, which generalize a result of [1,2].

Key words: integral sum graph; integral sum number; regular graph; cycle