

文章编号:1005-0523(2003)04-0109-03

关于算术图的几个结果

邓毅雄, 王 森, 曾 伟

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:图 $G=(V, E)$ (其中 $q=|E(G)|$ 称为 (k, d) -算术图如果不同的点能用不同的非负整数标号, 使得由端点标号之和所得边的值构成序列 $k, k+d, k+2d, \dots, k+(q-1)d$. 本文我们对 (k, d) -算术图进行了讨论, 得到了 (k, d) -算术图的几个结果.

关键词:图; 算术图; 标号; 扩充

中图分类号:O157.5

文献标识码:A

0 引言

本文所讨论的图都是无向、无重边和环的简单图, 文中未加定义和说明的术语与符号参阅文献[2][3].

按一定要求给图的点进行一定的标号, 对应按某规则得到边的标号, 并要求边的标号满足适当的条件, 并且根据满足不同条件的标号来定义不同类型的图, 这是图论研究的非常主要的方面, 而且这方面的研究在目前是非常活跃的, 标号的种类也越来越丰富. 算术标号是这些标号中的一种, 由此对应的一类图称为算术图. 在文献[1]对其进行了讨论, 本文将从另外的角度来研究算术标号, 也就是通过将已知的算术图进行“扩充”得到新的算术图, 这是很有意义的. 利用此方法, 我们可以得到一些非常好的算术图的结果.

对图 $G=(V, E)$, $p=|V(G)|$, $q=|E(G)|$, 下面给出算术标号的定义.

定义:设映射 $f: V \rightarrow N$, 记 $f(G)=\{f(u) \mid u \in V(G)\}$, $f^+(G)=\{f(u)+f(v) \mid uv \in E(G)\}$. 设 k, d 是正整数, 对图 G 如果存在映射 $f: V \rightarrow N$, 使得(1) $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, 有 $f(u) \neq f(v)$; (2) $f^+(G)$

$=\{k, k+d, k+2d, \dots, k+(q-1)d\}$, 那么称 G 为 (k, d) -算术图, 其中 f 称为 G 的算术标号.

另外在文中, 我们也将利用到记号: $f_{\max}(G)=\max\{f(u) \mid u \in V(G)\}$, $f_{\min}(G)=\min\{f(u) \mid u \in V(G)\}$.

下面的引理1在文献[1]中已经给予了讨论, 为了需要我们在此重新叙述.

引理1^[2] 对任意非负整数 r 和 d ,

(i) 圈 C_{4k+1} 是 $(2dk+2r, d)$ -算术图;

(ii) 圈 C_{4k+3} 是 $((2k+1)d+2r, d)$ -算术图.

证明^[1] 依次记 C_n 的各点为 $u_1, u_2, \dots, u_n$, 如下给出其标号 f :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(u_i) &= \begin{cases} r + \frac{1}{2}(i-1)d, & \text{当 } i \text{ 是奇数,} \\ 2dk + r + \frac{1}{2}id, & \text{当 } i \text{ 是偶数,} \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad f(u_i) &= \begin{cases} r + \frac{1}{2}(i-1)d, & \text{当 } i \text{ 是奇数,} \\ (2k+1)d + r + \frac{1}{2}id, & \text{当 } i \text{ 是偶数.} \end{cases} \end{aligned}$$

1 主要结果及其证明

我们注意到在文献[1]中的定理10考虑了 $(k,$

收稿日期:2003-02-23

作者简介:邓毅雄(1963-), 男, 江西新干人, 华东交通大学副教授.

d)-算术图的一种扩充,在本文中,我们从不同的角度继续讨论这个问题.

对图 $G=(V, E)$, 设 $S \subset V(G)$, A 是非空孤立点集, 且 $A \cap V(G) = \emptyset$. 设 $G'=(V', E')$, 其中 $V'=V(G) \cup A$, $E'=E(G) \cup \{uv \mid u \in S, v \in A\}$, 则称 G' 为 G 关于 S 的联式扩充图, 记为 $G'=G(S)+A$, 当 $S=V(G)$ 时, 简记为 $G+A$.

如果 G 是 (k, d) -算术图, 其中算术标号为 f . 设 m 和 t 是给定的非负整数, 记 $S_{m,t}(G)=\{v_i \mid v_i \in V(G), \text{ 且使得 } f(v_i)=m+id (i=0, 1, \dots, t)\}$, 我们称 $S_{m,t}(G)$ 为在算术标号 f 下 G 的可扩充点集, 简记为 $S_{m,t}=S_{m,t}(G)$.

定理 1 如果 G 是 (k, d) -算术图, f 为其一个算术标号, 设 $A=\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, 其中 $A \cap V(G) = \emptyset$. 如果在标号 f 下存在 m 和 t , 使得 $k-m+[q+(j-1)(t+1)]d \notin f(G) (j=1, 2, \dots, s)$, 则图 $G(S_{m,t})+A$ 也是 (k, d) -算术图.

证明: 注意到, 此时 $q'=|G(S_{m,t})+A|=q+s(t+1)$. 我们如下定义 $G(S_{m,t})+A$ 的标号 F :

- 1) 当 $v \in V(G)$ 时, $F(v)=f(v)$;
- 2) 当 $u_j \in A$ 时, $F(u_j)=k-m+[q+(j-1)(t+1)]d (j=1, 2, \dots, s)$.

由于 $k-m+[q+(j-1)(t+1)]d \notin f(G)$, 显然 $\forall u, v \in V(G(S_{m,t})+A)$, $u \neq v$, 有 $F(u) \neq F(v)$; 其次设 $M_j=\{f(u_j)+f(v_i) \mid u_j \in A, v_i \in V(G) (i=0, 1, \dots, t)\} (j=1, 2, \dots, s)$, 显然 $M_j=\{k+[q+(j-1)(t+1)]d, k-m+[q+(j-1)(t+1)+1]d, \dots, k-m+[q+(j-1)(t+1)+t]d\}$, 而 $\bigcup_{j=1}^s M_j=\{k+qd, k+(q+1)d, \dots, k+[q+s(t+1)-1]d\}$, 从而 $F^+(G(S_{m,t})+A)=\{k, k+d, k+2d, \dots, k+(q'-1)d\}$, 因此 $G(S_{m,t})+A$ 也是 (k, d) -算术图.

我们称定理 1 为 (k, d) -算术图的联式扩充, 由定理 1 可以从已知的 (k, d) -算术图, 通过联式扩充得到其它许多新的 (k, d) -算术图.

由引理 1, (i) 当 $n=4k+1$ 时, 取 $m=r, t=4k$; (ii) 当 $n=4k+3$ 时, 取 $m=r, t=4k+2$, 在由引理 1 给出的标号下, 对应的 $S_{m,t}(C_n)=V(C_n)$. 因此, 由定理 1 有

推论 1 对任意非负整数 r 和 d ,

(i) 图 $C_{4k+1}+\overline{K}_s$ 是 $(2dk+2r, d)$ -算术图;

(ii) 图 $C_{4k+3}+\overline{K}_s((2k+1)d+2r, d)$ -算术

图.

另外我们注意到, 星 $K_{1,n-1}$ 是 (k, d) -算术图, 其一个标号为 f 使得 $f(K_{1,n-1})=\{k/2, k/2+d, \dots, k/2+(n-1)d\}$, 所以可取 $m=k/2, t=n-1$, $S_{m,t}(K_{1,n-1})=V(K_{1,n-1})$, 由定理 1 有

推论 2 图 $K_{1,n-1}+\overline{K}_s$ 是 (k, d) -算术图.

文献[1]中指出扇形图是 $P_n+K_1(1, 1)$ -算术图, 事实上, 由定理 1 我们可以将此结论推广为

推论 3 图 $P_n+\overline{K}_s (s \geq 1)$ 是 $(1, 1)$ -算术图.

我们也注意到, P_{2k+1} 和 P_{2k} 是 (k, d) -算术图, 其一个标号为 $f: f(u_{2i})=k/2+(i-1)d, f(u_{2i+1})=k/2+kd+id$. 类似地, 我们有

推论 4 图 $P_{2k}+\overline{K}_s$ 和 $P_{2k+1}+\overline{K}_s$ 都是 (k, d) -算术图.

下面我们考虑算术图的另外一种扩充. 对图 $G=(V, E)$, $S \subset V(G)$, 我们将在点集 S 的每个点上分别邻接 t 条悬挂边所得之图称为 G 的关于 S 的 t -冠状扩充图, 记为 $G(S) \odot tK_1$. 当 $S=V(G)$ 时, $G(V) \odot tK_1$ 称为 G 的 t -冠图, 简记为 $G \odot tK_1$. 特别当 G 为圈 C_n 时, $C_n \odot mK_1$ 称为皇冠图. 设 $q'=|E(G(S) \odot tK_1)|$, 则 $q'=q+t|S|$.

定理 2 设 G 是 (k, d) -算术图, f 为其一个算术标号, 如果存在 $S_1=\{v_i \mid v_i \in V(G), \text{ 且 } f(v_i)=m+2id (i=0, 1, \dots, s_1)\}$, $S_2=\{v_i \mid v_i \in V(G), \text{ 且 } f(v_i)=m+(2i-1)d (i=1, 2, \dots, s_2)\}$, $S=S_1 \cup S_2$, 则当 (1) $s_1 \geq s_2, k-m+(q-s_1)d > f_{\max}(G)$; 或 (2) $s_1 < s_2, k-m+(q-s_2)d > f_{\max}(G)$ 时, 图 $G(S) \odot tK_1$ 也是 (k, d) -算术图.

证明: 此时 $q'=q+t(s_1+s_2+1)$, 设 $u_{2i,j}$ 是与 S_1 中的点 $v_{2i} (i=0, 1, \dots, s_1)$ 邻接的第 j 个悬挂点; $u_{2i-1,j}$ 是与 S_2 中的点 $v_{2i-1} (i=1, 2, \dots, s_2)$ 邻接的第 j 个悬挂点 ($j=1, 2, \dots, t$).

当 $s_1 \geq s_2, k-m+(q-s_1)d > f_{\max}(G)$ 时,

图 $G(S) \odot tK_1$ 各点的标号 F 定义如下:

- (i) 若 $v \in V(G)$, $F(v)=f(v)$;
- (ii) $F(u_{2i,j})=k-m+[q+(j-1)(s_1+1)-i]d (j=1, 2, \dots, t, i=0, 1, \dots, s_1)$;
- (iii) $F(u_{2i-1,j})=k-m+t(s_1+1)d+[q+(j-1)s_2-i]d (j=1, 2, \dots, t, i=1, 2, \dots, s_2)$.

此时, 设 $G'=G(S) \odot tK_1$, 显然 $F_{\min}(G')=k-m+(q-s_1)d > f_{\max}(G)$, 且 $F(u) \neq F(v) (u \neq v \in V(G'))$, 同时 $F^+(G)=F^+(G) \cup \{F(u_{2i,j})+m+$

$2id | i=0, 1, \dots, s_1\} \cup \{F(u_{2i-1,j}) + m + (2i-1)d | i=1, 2, \dots, s_2\} = \{k, k+d, k+2d, \dots, k+[q+t(s_1+s_2+1)-1]d\}$, 因此 F 是 $G(S) \odot tK_1$ 的 (k, d) -算术标号, 因此 $G(S) \odot tK_1$ 是 (k, d) -算术图.

当 $s_1 < s_2, k-m+(q-s_2)d > f_{\max}(G)$ 时,

图 $G(S) \odot tK_1$ 各点的标号 F 定义如下:

(i) 若 $v \in V(G), F(v) = f(v)$;

(ii) $F(u_{2i-1,j}) = k-m+[q+(j-1)s_2-i]d$ ($j=1, 2, \dots, t, i=0, 1, \dots, s_2$);

(iii) $F(u_{2i,j}) = k-m+ts_2d+[q+(j-1)(s_1+1)-i]d$ ($j=1, 2, \dots, t, i=1, 2, \dots, s_1$)

同样容易验证, F 是 $G(S) \odot tK_1$ 的 (k, d) -算术标号, 因此 $G(S) \odot tK_1$ 是 (k, d) -算术图.

综上所述, $G(S) \odot tK_1$ 是 (k, d) -算术图.

我们称此定理为 (k, d) -算术图的冠状扩充定理, 由它我们通过已知的 (k, d) -算术图, 可得到若干对应的冠图.

利用定理 2, 由引理 1, 对 C_{4k+1} 取 $s_1 = s_2 = 2k$, $S = V(C_{4k+1})$, 对 C_{4k+3} 取 $s_1 = s_2 = 2k+1$, $S = V(C_{4k+3})$, 得到:

推论 5 对任意非负整数 r 和 d ,

(i) 冠图 $C_{4k+1} \odot tK_1$ 是 $(2dk+2r, d)$ -算术图;

(ii) 冠图 $C_{4k+3} \odot tK_1$ 是 $((2k+1)d+2r, d)$ -算术图.

T -梅花图是在轮图 $C_n + K_1$ 的圈上每点分别

邻接 t 条悬挂边所得之图, 记为 $H(n, t)$. 由推论 1 及定理 2 我们有

推论 6 对任意非负整数 r 和 d ,

(i) T -梅花图 $H(4k+1, t)$ 是 $(2dk+2r, d)$ -算术图;

(ii) T -梅花图 $H(4k+3, t)$ 是 $((2k+1)d+2r, d)$ -算术图.

我们将在扇形图 $P_n + K_1$ 的 P_n 上的每点分别邻接 t 条悬挂边所得之图称为 t -花扇图, 记为

$F(n, t)$. 由推论 4 及其讨论, 我们有

推论 7 图 $F(2k+1, t)$ 和 $F(2k, t)$ 都是 (k, d) -算术图.

由上面的讨论我们看到, 利用定理 1 和定理 2, 通过将已知的算术图进行扩充, 能得到其它许多典型的算术图.

参考文献:

- [1] B. D. Acharya, S. M. Hegde, Arithmetic Graphs, Journal of Graph Theory [J]. Vol. 14, no. 3, 275—299(1989).
- [2] G. Chartrand, L. Lesniak, Graphs and Digraphs [M]. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey, 1996.
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications [M]. Elsevier North-Holland 1976.
- [4] J. A. Gallian, A Survey: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labelling Graphs, Journal of Graph Theory [J]. Vol. 14, no. 4, 491—504(1989).
- [5] T. Grace, On Sequential Labellings of Graphs, Journal of Graph Theory [J]. Vol. 8, no. 7, 195—201(1983).

Some Results of Arithmetic Graphs

DENG Yi-xiong, WANG Seng, ZENG Wei

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ. Nanchang 330013, China)

Abstract: A graph $G=(V, E)(q=|E|)$ is said to be (k, d) -arithmetic if its vertices can be assigned distinct non-negative integers so that the values of the edges are obtained as the sums of the arithmetic progression $k, k+d, \dots, k+(q-1)d$. In this paper, After the discussion of arithmetic graph, some results about it are obtained.

Key words: graph; arithmetic graph; labeling; extend