

文章编号: 1005-0523(2003)04-0112-02

偶图的符号控制数的两个下界

冯立华, 王家宝

(中南大学 数学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 对于偶图 G 的符号控制数 γ_s , 毛经中等证明了 $\gamma_s \geq 4(\sqrt{1+n}-1)-n$, 对此结果作进一步的改进.

关 键 词: 符号控制数; 下界; 图论

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

设 $G=(V, E)$ 是一个简单图, 这里, V 是顶点的集合, E 是边的集合. 对于 $v \in V$, 称 $N(v)=\{u \in V \mid uv \in E\}$ 为 v 的开邻集, 称 $N[v]=\{v\} \cup N(v)$ 为 v 的闭邻集. 对于顶点集 $S \subset V$, 定义 S 的开邻集为 $N(S)=\bigcup_{v \in S} N(v)$, 闭邻集为 $N[S]=S \cup N(S)$. 对于一个二元函数 $f: V \rightarrow \{-1, +1\}$, 定义 f 的权为 $f(V)=\sum_{u \in V} f(u)$. 对于 $v \in V$, 定义 $f(N[v])=\sum_{u \in N[v]} f(u)$. 图 G 的一个符号控制函数是指一个函数 $f: V \rightarrow \{-1, +1\}$, 使得对于所有的 $v \in V$, 都有 $f(N[v]) \geq 1$ 成立. 图 G 的符号控制数 γ_s 是指 G 上的所有符号控制函数的最小的权, G 的一个具有权 γ_s 的符号控制函数称为的一个 γ_s 函数.

凡是本文中没有出现的术语, 见[1].

对于偶图, Dunbar 等曾经提出如下的猜想: $\gamma^- \geq 4(\sqrt{1+m}-1)-n$. 王春香, 毛经中证明了这个猜想是正确的, 并得出如下的定理

定理 A 设 G 是具有 n 个顶点的偶图, 则 $\gamma_s \leq 4(\sqrt{1+n}-1)-n$.

我们对此定理作了改进, 得到

定理 1 设 G 具有 n 个顶点的偶图, 其最小度为 $\delta \geq 2$, 则有

$$\gamma_s \geq \sqrt{(\delta+2)(\delta+2+4n)} - (\delta+2) - n$$

证明 设 f 是 G 的一个符号控制函数且满足

$\gamma_s(G)=f(V)$, 令 X, Y 分别是偶图的两部分顶点集合. X^+, X^-, Y^+, Y^- 分别表示 X, Y 中赋值 $+1$ 与 -1 的顶点的子集合, 且 $|X^+|=k, |Y^+|=l, |X^-|=s, |Y^-|=t$. 如果 $X^- \neq \emptyset$, 则由符号控制的定义, X^- 中每一个顶点都至少与 Y^+ 中 $\delta/2+1$ 个顶点相邻. 因此, 由抽屉原理, Y^+ 中至少有一个顶点 y 与 X^- 中至少 $\frac{(\delta/2+1) \cdot |X^-|}{|Y^+|}$ 个顶点相邻, 所以

$$1 \leq f[y] \leq 1 + |X^+| - \frac{(\delta/2+1) \cdot |X^-|}{|Y^+|}$$

即

$$|X^-| \leq \frac{|X^+| \cdot |Y^+|}{\delta/2+1} \leq \frac{2kl}{\delta+2}.$$

同理, 有

$$|Y^-| \leq \frac{2kl}{\delta+2}.$$

因此, 我们得到

$$|X^-| + |Y^-| \leq \frac{4kl}{\delta+2},$$

即

$$s+t \leq \frac{4kl}{\delta+2}$$

又因为

$$\begin{aligned} n &= k+l+s+t \leq t+l + \frac{4kl}{\delta+2} \\ &\leq k+l + \frac{4}{\delta+2} \cdot \frac{(k+l)^2}{4} \end{aligned}$$

收稿日期: 2003-02-09

作者简介: 冯立华(1979-), 男, 山东日照人, 硕士研究生.

即

$$(k+l)^2 + (\delta+2)(k+l) - (\delta+2)n \geq 0$$

解之可得

$$k+l \geq \frac{-(\delta+2) + \sqrt{(\delta+2)(\delta+2+4n)}}{2}$$

所以

$$\gamma_s = 2(k+l) - n$$

$$\geq \sqrt{(\delta+2)^2 + 4(\delta+2)n} - (\delta+2) - n$$

等号成立当且仅当, 对于任意 $x \in X^+$, $d_x^+ = d_x^-(x) = k$; 对任意 $x \in X^-$, $d_x^+(x) = \delta/2 + 1$, $d_x^-(x) = \delta/2 - 1$; 对 $y \in Y^+$, $d_x^+(y) = d_x^-(y) = k$; 对 $y \in Y^-$, $d_x^+(y) = \delta/2 + 1$, $d_x^-(y) = \delta/2 - 1$. 并且 $|X^+| = |Y^+| = k = \frac{-(\delta+2) + \sqrt{(\delta+2)(\delta+2+4n)}}{4}$,

证明完毕.

不难看出, 毛经中等所给出的公式是本定理当 $\delta=2$ 时的特例.

定理 2 设 G 是具有 n 个顶点的偶图, 其最大度, 最小度分别为 Δ, δ , 则

$$\gamma_s(G) \geq \frac{2\epsilon+l}{2\Delta} - (1 - \frac{1}{\Delta}) \frac{2\epsilon-l}{2(\delta+1)},$$

这里 l 是图中奇数度顶点的个数.

证明 设 f 是 G 上的一个符号控制函数, 且满足 $f(V) = \gamma_s(G)$. 令 X, Y 分别是偶图的两部分顶点子集, 进一步的令 X^+, X^- 分别表示 X 中赋值 $+1$ 与 -1 的点的集合, Y^+, Y^- 也类似定义. 为方便起见, 令 $|X^+| = k, |Y^+| = u, |X^-| = s, |Y^-| = t$. 令 l_1 是 X 中奇数度顶点的个数, l_2 是 Y 中的奇数度顶点的个数. $l_1 + l_2 = l$. 首先, 由 $f(N[v]) \geq 1$, 知

1) 对于 $x \in X^+$, x 与 Y^+ 中至少 $d(x)/2 + 1$ 个顶点相邻, 而与 Y^- 中至多 $d(x)/2 - 1$ 个顶点相邻.

2) 对于 $x \in X^+$, x 与 Y^+ 中至少 $d(x)/2$ 个顶点相邻, 与 Y^- 中至多 $d(x)/2$ 个顶点相邻.

所以, 我们有

$$\begin{aligned} e(X, Y^+) &\geq \sum_{x \in X^+} d(x)/2 + \sum_{x \in X^-} (d(x)/2 + 1) \\ &= \sum_{x \in X^+} d(x)/2 + l_1/2 + s \\ &= (\epsilon + l_1)/2 + s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(X, Y^-) &\leq \sum_{x \in X^+} (d(x)/2 - 1) + \sum_{x \in X^-} d(x)/2 \\ &= \sum_{x \in X^+} d(x)/2 - l_1/2 - s \\ &= (\epsilon + l_1)/2 - s \end{aligned}$$

中国知网 <https://www.cnki.net>

而下述两个不等式是显然的,

$$e(X, Y^+) \leq \Delta \cdot |Y^+| = \Delta \cdot u,$$

$$e(X, Y^-) \geq \delta \cdot |Y^-| = \delta \cdot t.$$

于是我们有

$$u \geq \frac{(\epsilon + l_1)/2 + s}{\Delta}, t \leq \frac{(\epsilon - l_1)/2 - s}{\delta}.$$

由于 X 和 Y 的地位的对称性, 我们得到

$$k \geq \frac{(\epsilon + l_2)/2 + t}{\Delta}, s \leq \frac{(\epsilon - l_2)/2 - t}{\delta}.$$

于是 $s + t \leq \frac{2\epsilon - l}{2(\delta + 1)}$

$$\begin{aligned} \gamma_s(G) &= u + k - s - t \\ &\geq \frac{2\epsilon + l}{2\Delta} - (1 - \frac{1}{\Delta})(s + t) \\ &\geq \frac{2\epsilon + l}{2\Delta} - (1 - \frac{1}{\Delta}) \frac{2\epsilon - l}{2(\delta + 1)}, \end{aligned}$$

证明完毕.

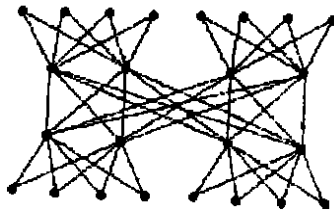


图 1

事实上, 这个结果是最佳可能的. 我们可以构造出一个使等号成立的图 (见图 1). 令 H 是 $K_{2,4}$ 的两个拷贝, H_1, H_2 是 H 的两个拷贝, X_i, Y_i 分别是 H_i 中度为 2 和 4 的顶点集合, $i=1, 2$. 令 G 是在 $H_1 \cup H_2$ 中, 连接 Y_1 中的顶点与 Y_2 中的每一个顶点所得到的图, 因此我们有 $\Delta=8, \delta=2, \epsilon=48, l=0$. 函数 f 的定义为, 当 $v \in X_1 \cup X_2$ 时, $f(v) = -1$; 而当 $v \in Y_1 \cup Y_2$ 时, $f(v) = 1$. 这一个函数是符号控制函数且对每一个顶点 v , 有 $f(N[v]) = 1$. 因此 $\gamma_s(G) = -8$. 与定理 2 中的结论相等.

参考文献:

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory with Application, North Holland Amsterdam, 1976.
- [2] J. Dumbbar, S. Hedetniemi, M. A. Henning, Minus domination in graphs, Disc. Math. 199(1999)35~47.
- [3] C. Wang, J. Mao, A proof of a conjecture of minus domination in graphs, Disc. Math. 256(2002)519~521.

(下转第 120 页)

所以

$$\begin{aligned} iA &= e^{\frac{2k+1}{6}\pi i} - e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i} \\ B &= \sqrt{3} \cdot \frac{e^{\frac{2k+1}{6}\pi i} - e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}}{2i} - \frac{e^{\frac{2k+1}{6}\pi i} + e^{-\frac{2k+1}{6}\pi i}}{2i} \\ &= \sqrt{3} \sin \frac{2k+1}{6} \pi - \cos \frac{2k+1}{6} \pi = 2 \sin \frac{k}{3} \pi \\ \sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1-j}^j \cdot 3^{k-j} \cdot (-1)^j &= \sqrt{3} B = 2 \sqrt{3} \sin \frac{k}{3} \pi = \begin{cases} 3, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{6} \\ 0, & k \equiv 0 \text{ or } 3 \pmod{6} \\ -3, & k \equiv 4 \text{ or } 5 \pmod{6} \end{cases} \end{aligned}$$

同理对文献[7]中定理 4, 定理 5 的结果也可仿此简单证明.

参考文献:

[1] 陈景润. 组合数学简介[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983.
[2] 周学松等. 一个通项公式在建立恒等式方面的应用[J]. 华东交通大学学报, 2001(2): 25~27.
[3] 叶世琦. 广义 Fibonacci 数列[J]. 数学的实践与认识, 1992, 1.
[4] The Problem 1776. The American Mathematical Monthly, 2000, 6.
[5] 赵文玲等. 线性循环数列的通项公式[J]. 曲阜师范大学学报, 1996, 3.
[6] I. Tomescu. 组合学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
[7] 周学松等. 周期数列及其应用[J]. 华东交通大学学报, 2002, (2): 78~80.

The Properties of Pell Sequence And Lucass Sequence

ZHOU Xue-song

(Hangzhou Commercial College, Hangzhou 310035, China)

Abstract: Many properties about Pell sequence and Lucass sequence by the result in reference[2] are given the guess in ref-
ernce[7] is proven.

Key words: Pell sequence; Lucass sequess

(上接第 113 页)

Two Lower Bounds about the Signed Dominatin Number in Bipartite Graphs

FENG Li-hua, WANG Jia-bao

(School of Mathematics, Central South University Changsha 410075, China)

Abstract: Let γ_s be the signed domination number of a graph G . Wang and J, Mao had proved that the inequality $\gamma_s \geq 4$
($\sqrt{1+n}-1$)- n holds for all the bipartite graphs of order n . In this paper, we will give an improvement of this result and get
a new one.

Key words: Signed domination number; Lower bounds; graph theory