

文章编号: 1005-0523(2003)04-0114-03

一类算子方程组公共解存在定理

盛梅波

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 利用混合单调算子对的公共不动点的存在性进一步讨论一类混合单调算子方程组的公共解, 并得出迭代误差估计.

关 键 词: 混合拟可单调算子方程组; 混合单调算子; 公共解

中图分类号: O189.2

文献标识码: A

1 引 言

在动态规划研究中提出了如下形式的泛函方程组

$$\begin{cases} f(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G(x, y, g(x))] \\ g(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F(x, y, f(x))] \end{cases} \quad x \in S \quad (1)$$

其中 S 是一状态空间, D 是决策空间, $G, F: S \times D \times R \rightarrow R$, $\varphi: S \times D \rightarrow R$ 是给定的映象, $R = (-\infty, +\infty)$, 文[1]对与(1)相关的一类泛函方程解的存在性已作了一些研究, 我们将利用混合单调算子对(文[2])的性质, 采用非对称迭代逼近序列的收敛方法研究此类算子方程组的公共解, 并得出误差估计.

定义 1 称方程组(1)是混合拟可单调的, 若有映象 $G_1, F_1: S \times D \times R \times R \rightarrow R$

使得 (I) $G_1(x, y, t, t) = G(x, y, t)$, $F_1(x, y, t, t) = F(x, y, t)$;

(II) $G_1(x, y, t, s), F_1(x, y, t, s)$ 关于 t 非减, 关于 s 非增.

定义 2 函数称为方程组(1)的公共解, 如果

$$\begin{cases} f_*(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G(x, y, f_*(x))] \\ f_*(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F(x, y, f_*(x))] \end{cases} \quad x \in S \quad (2)$$

设 $B(S)$ 表示定义在 S 上的所有有界实函数的全体所构成的集合, 在通常意义的函数加法、数乘运算, 且定义范数, $\|f(x)\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$, $f(x) \in B(S)$, 则 $B(S)$ 是一个 Banach 空间.

令 $P = \{f(x) \in B(S) \mid f(x) \geq 0, x \in S\}$, P 是 $B(S)$ 中所有非负函数集合, 根据文[3]的 234~240 页相关内容知 P 是 $B(S)$ 中正规锥, 由锥 P 可诱导 $B(S)$ 的一个偏序“ $\leq$ ”如下:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) - f_1(x) \leq P.$$

引理 1^[1] 设 $A, B: [x_0, y_0] \times [x_0, y_0] \rightarrow E$ 的两个混合单调算子, 若 A 在 $[x_0, y_0] \times [x_0, y_0]$ 上是连续算子, 且存在常数 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$, 满足下列条件:

(I) $x_0 + \alpha(y_0 - x_0) \leq B(x_0, y_0) \leq A(y_0, x_0) \leq y_0$;

(II) $0 \leq A(y, x) - B(x, y) \leq \beta(y - x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时;

(III) $B(y, x) \leq A(y, x)$, 当 $x_0 \leq x < y \leq y_0$ 时.

则混合单调算子对 $A(x, y) = x, B(y, x) = y$ 在 $[x_0, y_0]$ 上有唯一的公共不动点 z_0 . 且有误差估计式.

2 主要结果

定理 1 设方程组(1)是混合拟可单调的, 并满

收稿日期: 2003-02-25

作者简介: 盛梅波(1966-), 男, 安徽怀远人, 华东交通大学副教授, 硕士.

足下列条件

(I) $\varphi(x, y), F_1(x, y, 0, 0), G_i(x, y, 0, 0)$ 均在 $S \times D$ 上是有界的;

其中 $F_1(x, y, 0, 0), G_i(x, y, 0, 0)$ 是定义 1 中出现的映象.

(II) $\forall (x, y) \in S \times D$ 和 $\forall t, \bar{t}, s, \bar{s} \in R$
 $F_1(x, y, t, s) - F_1(x, y, \bar{t}, \bar{s}) \leq \max\{t - \bar{t}, s - \bar{s}\}$,

$$G_1(x, y, t, s) - G_1(x, y, 0, 0) \leq \max\{t, s\},$$

(III) $\forall (x, y) \in S \times D$ 和 $\forall t < s \in R$, 总存在 $\beta \in (0, 1)$ 使得

$$F_1(x, y, s, t) - G_1(x, y, t, s) \leq \beta(s - t);$$

(IV) $\forall (x, y) \in S \times D$ 和 $\forall t < s \in R$, 总有

$$G_1(x, y, s, t) \leq F_1(x, y, s, t)$$

(V) 存在 $f_0, g_0 \in B(S)$ 且 $f_0 < g_0$, 使得

$\forall x \in S, y \in D$, 有

$$f_0(x) + \alpha(g_0(x) - f_0(x))$$

$$\leq \varphi(x, y) + G_1(x, y, f_0(x), g_0(x))$$

且 $\varphi(x, y) + F_1(x, y, g_0(x), f_0(x)) \leq g_0(x)$

则当 $\alpha + \beta < 1$ 时, 算子方程组 (1) 有唯一解 $f^*(x) \in B(S) \cap [f_0, g_0]$, 且有误差估计式:

$$\|f^*(x) - f_n(x)\| \leq (\alpha + \beta)^n \|g_0(x) - f_0(x)\| \text{ 或 } \|f^*(x) - g_n(x)\| \leq (\alpha + \beta)^n \|g_0(x) - f_0(x)\|$$

其中 $f_{n+1}(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G_1(x, y, f_n(x), g_n(x))] - \alpha(g_n(x) - f_n(x))$

$g_{n+1}(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, g_n(x), f_n(x))], n=0, 1, 2, \dots$

证明: 定义两个二元算子 A, B 如下:

$$A(f(x), g(x)) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, f(x), g(x))]$$

$$B(f(x), g(x)) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G_1(x, y, f(x), g(x))]$$

$$x \in S \quad (3)$$

① A, B 是 $B(S) \times B(S) \rightarrow B(S)$ 的混合单调算子.

由条件 (II) 可知 $\forall t, s \in R$, 有

$$F_1(x, y, t, s) \leq F_1(x, y, 0, 0) + \psi_1(\max\{t, s\}) \leq F_1(x, y, 0, 0) + \max\{t, s\}$$

$$G_1(x, y, t, s) \leq G_1(x, y, 0, 0) + \psi_2(\max\{t, s\}) \leq G_1(x, y, 0, 0) + \max\{t, s\}$$

从而有 $\forall f, g \in B(S)$:

$$F_1(x, y, 0, 0) \leq (\max\{-f(x), -g(x)\})$$

$$\leq F_1(x, y, f(x), g(x))$$

$$\leq F_1(x, y, 0, 0) + \max\{f(x), g(x)\}$$

$$G_1(x, y, 0, 0) \leq (\max\{f(x), g(x)\})$$

$$\leq G_1(x, y, f(x), g(x))$$

$$\leq G_1(x, y, 0, 0) + \max\{f(x), g(x)\}$$

即 A, B 是 $B(S) \times B(S) \rightarrow B(S)$ 的算子. 再者方程组 (1) 是混合拟可单调以及定义 1 又得:

A, B 是 $B(S) \times B(S) \rightarrow B(S)$ 的混合单调算子对.

② 下面验证 A, B 是 $[f_0, g_0] \times [f_0, g_0] \rightarrow B(S)$ 的上满足引理条件的算子对.

1° 由条件 (V) 知 $\forall x \in S$, 有

$$f_0(x) + \alpha(g_0(x) - f_0(x))$$

$$\leq \varphi(x, y) + G_1(x, y, f_0(x), g_0(x))$$

$$= B(f_0(x), g_0(x))$$

$$A(f_0(x), g_0(x)) = \sup_{y \in D} \varphi(x, y) + F_1(x, y, g_0(x),$$

$$f_0(x)) \leq g_0(x)$$

由条件 (IV) 知 $\forall y \in D$, 有

$$G_1(x, y, f_0(x), g_0(x)) \leq F_1(x, y, g_0(x), f_0(x))$$

$$\text{从而 } B(f_0(x), g_0(x)) \leq A(g_0(x), f_0(x)).$$

2° 对 $\forall f_0 \leq f < g \leq g_0$ 由条件 (III) 知

$$\theta \leq A(g(x), f(x)) - B(f(x), g(x))$$

$$= \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, g(x), f(x))]$$

$$- \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G_1(x, y, f(x), g(x))]$$

$$\leq \sup_{y \in D} [F_1(x, y, g(x), f(x))$$

$$- G_1(x, y, f(x), g(x))]$$

$$\leq \sup_{y \in D} [\beta(g(x) - f(x))] = \beta(g(x) - f(x))$$

且 $\forall f_0 \leq f, \bar{f}, g, \bar{g} \leq g_0$ 有

$$A(f(x), g(x)) - A(f(x), \bar{g}(x))$$

$$= \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, g(x), f(x), g(x))]$$

$$- \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, \bar{f}(x), \bar{g}(x))]$$

$$\leq \sup_{y \in D} [F_1(x, y, g(x), f(x), g(x))$$

$$- F_1(x, y, \bar{f}(x), \bar{g}(x))]$$

$$\leq \sup_{y \in D} [\max\{f(x) - \bar{g}(x), \bar{f}(x) - \bar{g}(x)\}]$$

即 A 在 $[x_0, y_0] \times [x_0, y_0]$ 上连接.

3° 最后 $\forall f_0 \leq f < g \leq g_0$ 由条件 (IV) 有

$$B(f(x), g(x)) \leq A(g(x), f(x)).$$

由引理 1 得算子对 A, B 有唯一的公共不动点

$f^* \in [f_0, g_0]$, 使得

$$A(f^*(x), f^*(x)) = f^*(x), B(f^*(x), f^*(x))$$

$$=f_*(x)$$

$$\text{即} \begin{cases} f_*(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G(x, y, f_*(x), f_*(x))] \\ f_*(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F(x, y, f_*(x), f_*(x))] \end{cases},$$

从而定理成立.

类似定理 1 的证明利用文[2]定理 2 可得

定理 2 设方程组(1)是混合拟可单调的,并满足下列条件

(I) $\varphi(x, y), F_1(x, y, 0, 0), G_1(x, y, 0, 0)$ 均在 $S \times D$ 上是有界的;

其中 $F_1(x, y, 0, 0), G_1(x, y, 0, 0)$ 是定义 1 中出现的映象.

(II) $\forall (x, y) \in S \times D$ 和 $\forall t, \bar{t}, s, \bar{s} \in R$
 $F_1(x, y, t, s) - F_1(x, y, \bar{t}, \bar{s}) \leq \max\{t - \bar{t}, s - \bar{s}\},$

$G_1(x, y, t, s) - G_1(x, y, 0, 0) \leq \max\{t, s\};$

(III) $\forall (x, y) \in S \times D$ 和 $\forall t \leq s \leq R$, 总存在 $\beta \in (0, 1)$ 使得

$0 \leq F_1(x, y, s, t) - G_1(x, y, t, s) \leq \beta(s - t);$

(IV) 存在 $f_0, g_0 \in B(S)$ 且 $f_0 < g_0$, 使得 $\forall x \in S, y \in D$, 有

$f(x) + \alpha(g_0(x) - f_0(x))$

$\leq \varphi(x, y) + G_1(x, y, f_0(x), g_0(x))$

且 $\varphi(x, y) + F_1(x, y, g_0(x), f_0(x)) \leq g_0(x)$

则当 $\alpha + \beta < 1$ 时, 算子方程组(1)有唯一解 $f_*(x) \in B(S) \cap [f_0, g_0]$, 且有误差估计式:

$\|f_* - f_n(x)\| \leq (\alpha + \beta)^n \|g_0(x) - f_0(x)\|$ 或

$\|f_*(x) - g_n(x)\| \leq (\alpha + \beta)^n \|g_0(x) - f_0(x)\|$

其中

$f_{n+1}(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y)] + G_1(x, y, f_n(x),$

$g_n(x)) - \alpha(g_n(x) - f_n(x))$

$g_{n+1}(x) = \sup_{y \in D} [\varphi(x, y)]$

$+ F_1(x, y, g_n(x), f_n(x)), n=0, 1, 2, \dots$

事实上, 对 $\forall f_0 \leq f \leq g \leq g_0$ 由条件(III)知

$G_1(x, y, f(x), g(x)) \leq F_1(x, y, g(x), f(x))$

$\theta \leq A(g(x), f(x)) - B(f(x), g(x))$

$= \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + F_1(x, y, g(x), f(x))]$

$- \sup_{y \in D} [\varphi(x, y) + G_1(x, y, f(x), g(x))]$

$\leq \sup_{y \in D} [F_1(x, y, g(x), f(x))$

$- G_1(x, y, f(x), g(x))]$

$\leq \sup_{y \in D} \{\beta(g(x) - f(x))\} = \beta(g(x) - f(x))$

参考文献

- [1] Zhang Shisheng, Guo Weiping. On the existence and uniqueness theorems of solutions for the systems of mixed monotone operator equations with applications[J]. Applied Mathematics·A Journal of Chinese Universities(SerB), 1993, 8, 11~14.
- [2] 盛梅波, 董祥南. 混合单调算子对的公共不动点定理[J]. 华东交通大学学报(自然版), Vol 20, 2003(1), 86~88.
- [3] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985, 234~240.
- [4] 董祥南. 耦合不动点定理及其应用[J]. 江西师范大学学报(自然版), Vol 17, 1993(2), 109~115.

Common Solution of Some Systems of Operator Equations

SHENG Mei-bo

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: By using property of comple mixed monotone operators, common solution of some Systems of operator equations is obtained.

Key words: systems of mixed quasi montoned operator equations; mixed montone operator; common solution